Sammlung Schubert LXV

Darstellende Geometrie

Von

Theodor Schmid

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

I. Band

Mit 170 Figuren

Dritte Auflage



Berlin und Leipzig

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung
Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1922



5193

Thomas & Hubert, Weida i. Thür.

Vorwort zur ersten Auflage.

An vorzüglichen größeren Werken über darstellende Geometrie mit verschiedenen Zielen ist kein Mangel; dagegen dürfte ein etwas kleineres Werk, welches zwei Bände der „Sammlung Schubert“ umfaßt, nicht unwillkommen sein. Ich bin daher der Aufforderung, ein solches Buch zu schreiben, gerne nachgekommen. Mein sehr geschätzter Kollege Professor Dr. E. Müller hat nämlich die an ihn ergangene Aufforderung auf mich übertragen, weil er schon früher einen Vertrag für sein größeres Werk abgeschlossen hatte. Als Grundlage benützte ich die von mir seit dem Jahre 1899 an der Technischen Hochschule in Wien gehaltenen Vorlesungen. Es ist daher selbstverständlich [den Leitsätzen der „Sammlung Schubert“ entsprechend] auch den Anforderungen der technischen Kreise Rechnung getragen worden, indem an den geeigneten Stellen auf die Abbildung technischer Körper eingegangen wurde. Manches andere von dem Inhalte des Buches ist wieder mehr für die Leser der mathematischen Kreise bestimmt. Der I. Band beschränkt sich einerseits auf die Orthogonalprojektion (Grundriß, Aufriß, Kreuzriß und orthogonale Axonometrie) und anderseits auf die elementaren Flächen (Ebene, Kugel, Zylinder, Kegel) mit ihren Schnittlinien und Beleuchtungsverhältnissen. Nur die „abwickelbaren Flächen (Torsen)“ wurden noch einbezogen, weil sie sich an den Abwicklungsvorgang für Zylinder und Kegel gut anschließen lassen und weil sie mit den Raumkurven, welche als Schnittlinien zweier Flächen im allgemeinen auftreten, stets in Verbindung stehen. Einer Begründung bedarf vielleicht, daß die Antipolarität in bezug auf eine Ellipse aufgenommen wurde. Es geschah dies, weil diese Verwandtschaft in der graphischen Statik von Wichtigkeit ist und weil sie sich an der betreffenden Stelle so bequem einfügen ließ.

Bei der Behandlung des Stoffes wurde von der Reinheit der Methode abgesehen; die verschiedenen Zweige der Geometrie wurden nach Bedarf herangezogen. Die Hauptsache bildet die konstruktive Durchführung der vorkommenden Aufgaben. Es wurde daher auch die größte Sorgfalt auf die Herstellung der Figuren verwendet. Eine gute Figur soll das, was sie klarzumachen hat, möglichst deutlich zeigen; es müssen deshalb Zufälligkeiten ferngehalten werden und das Wesentliche muß gegenüber dem Minderwichtigen hervorgehoben sein. Auf Einfachheit und Genauigkeit der Konstruktionen wurde gelegentlich hingewiesen, ohne daß auf geometrographische Zählweisen näher eingegangen worden wäre. Hinsichtlich der Bezeichnung habe ich mich seit 25 Jahren an den in deutschen Schriften geometrischen Inhaltes meistverbreiteten Gebrauch gehalten. Übungsaufgaben sind in großer Zahl eingefügt*).

Ein Anhang zum II. Bande wird Andeutungen über die Lösung von schwierigeren der vorkommenden Aufgaben enthalten. Ein weiterer Anhang wird Bemerkungen über Geschichte und Literatur bringen — erst am Schlusse, weil für solche nur Interesse vorhanden ist, wenn der Leser mit dem Gegenstande bereits vertraut ist, wie Herr Loria in seinem Buche zutreffend sagt.

Es obliegt mir noch, meinen getreuen Helfern zu danken, nämlich den Herren Dr. A. Lackner, Dr. K. Mayer, E. Menzl und K. Nemetz. Sie besorgten die Übertragung der Figuren auf Karton und die Behandlung mit Tusche stets genau nach meinen Angaben; überdies waren sie beim Lesen der Korrekturen behilflich. Aber auch der Verlagsfirma muß ich bestens danken, daß sie allen meinen Wünschen bezüglich der Ausstattung des Buches nachgekommen ist.

Wien, im Mai 1912.

Th. Schmid.

---

*) Außerdem sei als Übungstoff empfohlen:

„Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie", herausgegeben von Th. Schmid. G. J. Göschen, Leipzig 1911.

„Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie", herausgegeben von Dr. E. Müller. 5 Hefte. F. Deuticke, Leipzig und Wien 1910.

Vorwort zur dritten Auflage.

Für diese dritte Auflage des I. Bandes wurden außer zahlreichen kleinen Änderungen noch Ergänzungen bei § 20, 3, § 21, 1, § 24, 1, § 28, 3, § 35, 1 vorgenommen. Auch einige Aufgaben wurden eingeschaltet. Die bei der zweiten Auflage eingefügten „geschichtlichen und literarischen Bemerkungen" wurden um 7 vermehrt; hervorzuheben wären etwa die Bemerkungen 2, 5, 12, 15, 23, 26, 31, 33.

Das Ausziehen der zwei neuen Figuren besorgte wieder Herr Ing. F. Kopatschek. Beim Lesen der Korrekturen wirkte mein Assistent Herr W. Domaschko mit. Beiden danke ich hiermit bestens.

Wien, im Mai 1922.

Th. Schmid.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Raumelemente, ebene Figuren und eckige Körper.

II. Abschnitt.

Kugel, Zylinder, Kegel.

III. Abschnitt.

Kugel, Zylinder, Kegel (Fortsetzung); Plankurve und Raumkurve.

IV. Abschnitt.

Orthogonale Axonometrie.

A. Neigung des Achsensystemes. Elementaraufgaben.

B. Drehung des Achsensystemes. Eckige Körper.

C. Kugel, Zylinder, Kegel.

Einleitung.

1. Die erste Hauptaufgabe der darstellenden Geometrie ist die zeichnerische Wiedergabe — Abbildung — der Raumgebilde auf einer Ebene*).

Es kann sich da um die Abbildung vorhandener Körper auf Grund einer messenden Aufnahme oder um die Abbildung bloß gedachter Körper auf Grund einer geistigen Überlegung handeln. Das hergestellte Bild soll anschaulich sein, d. h. man soll das Raumgebilde durch bloßes Anschauen der Zeichnung erkennen können. Um diese Forderung zu erfüllen, muß die Abbildung wenigstens in gewissem Sinne dem Sehvorgange entsprechen. Die Verbindungsgerade eines Punktes P mit dem Sehpunkte (Auge) D heißt Sehstrahl. Der Schnittpunkt P_c des Sehstrahles mit der Bildebene (Projektionsebene) β heißt Bild oder Projektion des Punktes**). Die Sehstrahlen, welche durch die Punkte einer Geraden g gehen, bilden ein Strahlbüschel auf der Verbindungsebene des Sehpunktes mit der Geraden. Die Schnittgerade g_c dieser projizierenden Ebene mit der Bildebene heißt Bild oder Projektion der Geraden. Sie enthält die Projektion eines jeden Punktes der Geraden. Die Schnittgerade e einer Ebene ε mit der Bildebene β heißt die Spur der Ebene. Der Schnittpunkt G einer Geraden g mit der Bildebene β heißt die Spur der Geraden. Die Projektion eines Sehstrahles ist eine unbestimmte Gerade durch die Spur des Sehstrahles. Alle Punkte des Sehstrahles mit Ausnahme von D selbst haben aber ihre Projektion in der Spur des Sehstrahles. Je nachdem man einen eigentlichen oder uneigentlichen (unendlich fernen) Punkt als Sehpunkt

---

*) Zurückführung der dreidimensionalen Gebilde auf die zweidimensionale Ebene.

**) Die Projektion des Sehpunktes selbst ist unbestimmt.

voraussetzt, unterscheidet man Zentralprojektion*) und Parallelprojektion. Sind die Sehstrahlen insbesondere zur Bildebene normal, so heißt die Abbildung eine Orthogonalprojektion oder ein Normalriß.

Zur Erhöhung der Anschaulichkeit wird bei der Abbildung von Körpern auch auf die Wiedergabe der Beleuchtungsverhältnisse und der Farbenwirkung Bedacht genommen. Die Herstellung von Bildern mit einem hohen Grade von Anschaulichkeit ist eine Kunst — die Malerei und die darstellende Geometrie kann als ihre geometrische Grundlage aufgefaßt werden.

Die Abbildung soll ferner eindeutig sein, d. h. man soll das Raumgebilde nach der Zeichnung auffinden, aufbauen können. Eine einzige Projektion ist zu diesem Zwecke nicht ausreichend. Durch die Projektion P_c ist ja die Lage des Punktes P auf dem Sehstrahle noch nicht bestimmt. Es wird zumeist noch eine zweite Projektion (Hilfsprojektion) benützt, wodurch dann das Raumgebilde eindeutig bestimmt ist. In dieser Hinsicht wird die darstellende Geometrie zum unentbehrlichen Verständigungsmittel der Technik, um bestehende oder neu erdachte Körperformen (Gebäude, Maschinen) zur allgemeinen Kenntnis zu bringen.

2. Die zweite Hauptaufgabe der darstellenden Geometrie ist die Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen der Raumgebilde in der Zeichnung.

Da man nämlich im Raume nicht konstruieren kann, das Zeichnen auf die Ebene beschränkt ist, so ist die darstellende Geometrie eine Theorie der geometrischen Konstruktionen für räumliche Gebilde, also ein wesentlicher Bestandteil der Raumgeometrie. Diese Konstruktionen werden um so einfacher, je einfacher der Zusammenhang zwischen Raumgebilde und Zeichnung ist. Die Forderung nach Einfachheit der Konstruktionen steht aber mit jener nach Anschaulichkeit im Widerspruche. Das einfachste Projektionsverfahren liefert am wenigsten anschauliche Bilder. Die Projektionsart ist also dem jeweiligen Zwecke entsprechend zu wählen (Monge[3]).

*) Die einfache Lochkammer ist ein optisches Instrument, welches unmittelbar eine solche Abbildung liefert.

I. Abschnitt.

Raumelemente, ebene Figuren und eckige Körper.

§ 1. Beziehung eines Körpers auf ein rechtwinkliges Achsensystem.

1. Ein Körper, welcher abgebildet werden soll, wird gewöhnlich auf ein *rechtwinkliges Achsensystem* bezogen, so daß die Achsen x, y, z zu den Hauptrichtungen — *Breite*, *Länge*, *Höhe* — des Körpers parallel sind. Der Schnittpunkt O der drei Achsen heißt der *Ursprung* des Achsensystems. Die acht Teile, in welche der Raum durch die drei Achsenebenen zerlegt wird, heißen *Oktanten*. Für eine Person, welche auf der xy-Ebene steht und die yz-Ebene hinter sich hat, sollen die positiven Strahlen der x-, y-, z-Achse beziehungsweise nach vorn, nach links, nach oben gerichtet sein. Befindet sich dann die Person in dem von den drei positiven Strahlen gebildeten Oktanten, so geht der positive Strahl der x-Achse durch eine *positive Drehung* (entgegengesetzt dem Bewegungsinne des Uhrzeigers) in den positiven Strahl der y-Achse, dieser durch eine gleiche Drehung in den positiven Strahl der z-Achse und dieser in gleicher Weise wieder in den positiven Strahl der x-Achse über. Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der *rechten Hand* jener Person können in die Lage der positiven Strahlen der x-, y-, z-Achse gebracht werden. Dieses Achsensystem, welches in der Folge gewöhnlich vorausgesetzt werden soll, heißt daher das *positive* oder *rechtshändige Achsensystem*. Geht der positive Strahl der y-Achse nach der entgegengesetzten Seite, so gehen die positiven Strahlen der Achsen durch *negative Drehung* in bezug auf die Person, welche sich im Oktanten der drei positiven Richtungen befindet, ineinander über und können durch die Finger der *linken Hand* jener Person gezeigt werden. Dieses *negative* oder *linkshändige*

Achsensystem*) kann mit dem vorigen nicht zur Deckung gebracht werden.

Sucht man die Orthogonalprojektionen des Körpers auf den drei Ebenen des Achsensystemes, so erhält man auf der xy-Ebene durch Sehstrahlen von der Richtung der z-Achse den Grundriß, auf der yz-Ebene durch Sehstrahlen von der Richtung der x-Achse den Aufriß und auf der zx-Ebene durch Sehstrahlen von der Richtung der y-Achse den Kreuzriß des Körpers.

2. Punkt und Ebene.

Jeder Punkt P kann als Eckpunkt eines rechtwinkligen Parallelepipedes betrachtet werden, welches den Ursprung O des Achsensystemes als gegenüberliegenden Eckpunkt besitzt. Die drei Kanten OX, OY, OZ des Parallelepipedes oder ihre Maßzahlen x, y, z heißen die Koordinaten des Punktes P; sie können zur Angabe des Punktes P dienen. Die drei anderen Eckpunkte des Parallelepipedes sind die Projektionen (Risse) P', P'', P''' des Punktes P (Lacroix[3]).

Jede Ebene ε ergibt durch den Schnitt mit den Ebenen α, β, γ des Achsensystems drei Spuren e_1, e_2, e_3. Die drei Strecken OX, OY, OZ, welche durch die Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen begrenzt werden, können auch zur Angabe der Ebene benützt werden.[5]

Der Abstand eines Punktes von der Grundebene ist dem Abstande seines Aufrisses von der y-Achse, dem Abstande seines Kreuzrisses von der x-Achse, sowie der Koordinate z gleich.

Ein Punkt, welcher auf der Grundebene liegt, ist zugleich sein Grundriß; sein Aufriß liegt auf der y-Achse; sein Kreuzriß liegt auf der x-Achse.

Zur Übung: Es ist das Entsprechende für die Aufriß- und Kreuzrißebene anzugeben.

*) Statt „rechtshändiges und linkshändiges Achsensystem" ist auch „englisches und französisches Achsensystem" gebräuchlich.

3. Man denkt sich nun die Grundebene um die y-Achse und die Kreuzrißebene um die z-Achse so lange gedreht, bis sie mit der Aufrißebene zusammenfallen. Man nennt daher die Achsen y und z Bildachsen. Durch diese Umlegung der Grundebene und der Kreuzrißebene auf die Aufrißebene wird die Übertragung auf eine einzige Ebene erreicht. Statt der Umlegung der Grundebene kann auch eine Projektion des Grundrisses auf die Aufrißebene

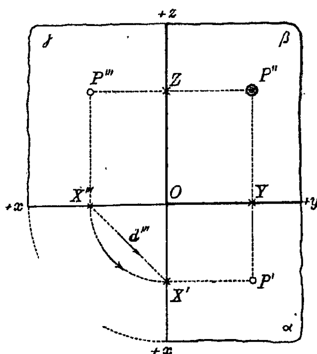


Fig. 1.

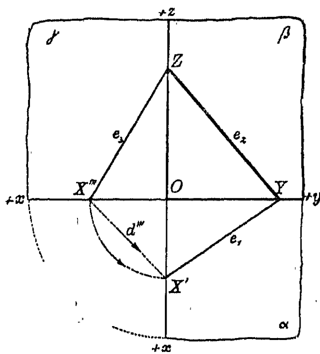


Fig. 2.

benützt werden, bei welcher die Sehstrahlen d unter $\pi/_4$ nach abwärts geneigt sind (und analog für den Kreuzriß). Die Figuren 1 und 2 zeigen die Abbildung

$$\text{eines Punktes } P \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1{,}2 \\ z = 1{,}5 \end{array} \right. \text{ und einer Ebene } \varepsilon \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1{,}5 \\ z = 1{,}8 \end{array} \right. .$$

Zur Übung: 1. Es sind Punkte mit gegebenen Koordinaten x, y, z abzubilden, wobei die Zahlen auch negativ gewählt werden mögen.

2. Es sind Punkte abzubilden, welche die Abstände a, b, c von den Achsen x, y, z haben, z. B. $a = 3$, $b = 2{,}7$, $c = 2{,}9$.

3. Es sind Ebenen abzubilden, welche zu einer der drei Ebenen des Achsensystemes normal, bzw. parallel sind.

4. Die Seiten a, b, c des Spurendreieckes XYZ einer Ebene sind gegeben; man soll daraus die Lage der Ebene finden.

§ 2. Punkt und Gerade im Zweibildersysteme; ihre Inzidenz.

1. Zwei von den drei erwähnten Abbildungen sind zur vollständigen Bestimmung des Raumelementes notwendig und hinreichend; die dritte Abbildung kann dann gefunden werden. Es ist daher zumeist nur ein Zweibildersystem im Gebrauche, nämlich „Grund- und Aufriß" oder „Aufriß und Kreuzriß". In der Folge soll also gewöhnlich ein solches Zweibildersystem benützt werden. Dabei ist noch

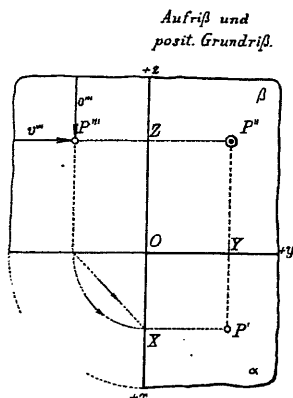


Fig. 3.

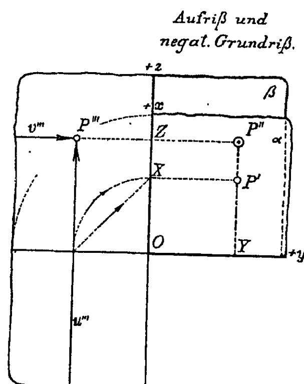


Fig. 4.

ein Umstand beachtenswert. Bei der Herstellung des Grundrisses kann man sich nämlich das Auge in der positiven Richtung der z-Achse denken, so daß die Sehstrahlen von oben nach abwärts gehen. Man erhält dann einen positiven Grundriß oder eine Übersicht. Für diesen Fall wird der vordere Teil der Grundebene nach abwärts umgelegt. Denkt man sich dagegen das Auge in der negativen Richtung der z-Achse, so daß die Sehstrahlen von unten nach aufwärts gehen (was für die Abbildung von Körpern, welche man gewöhnlich von unten sieht, passend ist), so erhält man einen negativen Grundriß oder eine Untersicht. In diesem Falle ist, der jetzigen Lage des Auges entsprechend, der vordere Teil der Grund-

ebene nach aufwärts umzulegen *). Die Figuren 3, 4 zeigen die Sehstrahlen v und o, bzw. u.

Ebenso kann man sich das Auge bei Herstellung des Kreuzrisses in der positiven Richtung der y-Achse denken, so daß die Sehstrahlen von rechts nach links gehen. Man erhält dadurch einen positiven Kreuzriß oder eine Ansicht von rechts. Der vordere Teil der Kreuzrißebene ist da nach links umzulegen. Im andern Falle erhält man einen negativen Kreuzriß oder eine Ansicht von links und der vordere Teil der Kreuzrißebene ist nun nach rechts umzulegen.

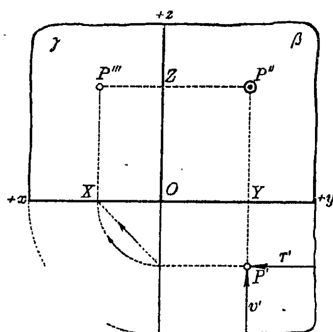


Fig. 5.

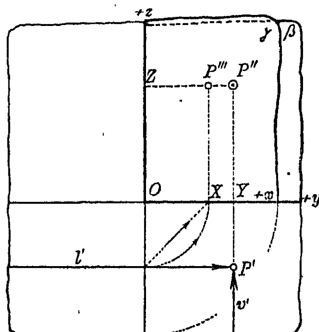


Fig. 6.

Die Figuren 5, 6 zeigen die Sehstrahlen v und r, bzw. l.

Für die erwähnten Zweibildersysteme gilt nun:

1. Jeder Punkt P des Raumes ist durch ein Punktepaar (P', P'' oder P'', P''') abgebildet, welches auf einer zur Bildachse (y oder z) normalen Geraden liegt. Diese (senkrechte oder wagrechte) Gerade heißt Ordner**); die beiden Bilder nennt man zugeordnete Normalrisse (E. Müller[6]). Der zur z-Achse parallele Ordner bedeutet zugleich den Aufriß o'' des von oben kommenden Sehstrahles (oder den

*) Es soll nämlich die Grundebene auch nach der Umlegung jene Seite dem in der positiven Richtung der x-Achse befindlichen Auge zukehren, welche sie im Raume dem in der positiven oder negativen Richtung der z-Achse gedachten Auge zuwendet.

**) Dabei ist zu beachten, daß der Punkt Q, für welchen $Q' = P''$ und $Q'' = P'$ ist, vom Punkte P verschieden ist.

Aufriß u'' des von unten kommenden Sehstrahles) und den Grundriß v' des von vorn kommenden Sehstrahles.

2. Jede Gerade g des Raumes ist durch ein Geradenpaar (g', g'' oder g'', g''') abgebildet, welches an keine Bedingung geknüpft ist*).

3. Inzidenz von Punkt und Gerade; die Punktreihe.

α) Zieht man irgendeinen Ordner (Fig. 7 und 8), so sind seine Schnittpunkte mit g' und g'' die Projektionen P' und P'' eines Punktes P, welcher auf der Geraden g liegt; denn „bei Inzidenz von Punkt und Gerade müssen die gleichartigen Projektionen inzident sein".

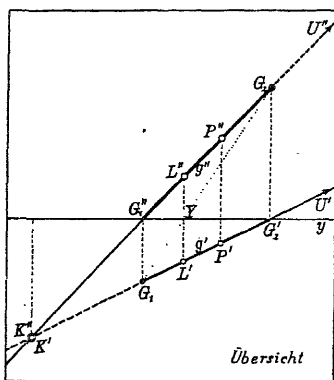


Fig. 7.

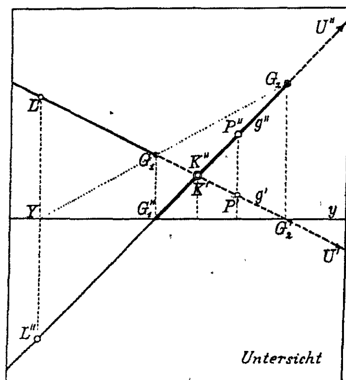


Fig. 8.

Die Ordner bilden ein Parallelstrahlbüschel. Daraus folgt: „Grund- und Aufriß einer Punktreihe sind perspektiv ähnliche Punktreihen."

β) Die Projektionen des uneigentlichen Punktes U der Geraden g sind die uneigentlichen Punkte U' und U'' der Projektionen g' und g'' der Geraden; dabei ist der Ordner die uneigentliche Gerade der Zeichenebene.

γ) Der Schnittpunkt von g'' mit y ist der Aufriß G_1'' der Grundspur G_1 und der Schnittpunkt von g' mit y ist der

*) In der Zeichenebene gibt es ∞^3 Punktepaare, welche auf je einem Ordner liegen und ∞^4 Geradenpaare, welche keiner Bedingung zu genügen haben (nämlich zu jeder Geraden kann man die ∞^2 Geraden der Ebene hinzunehmen, und weil die erste Gerade selbst ∞^2 Lagen annehmen kann, gibt es ∞^4 Paare). Es entspricht das dem Umstande, daß der Raum ∞^3 Punkte und ∞^4 Geraden enthält.

Grundriß G_2' der Aufrißspur G_2 der Geraden (§ 1, 2). Im Zweispurensysteme wird die Gerade durch die beiden Spuren G_1, G_2 (oder G_2, G_3) angegeben, also durch ein Punktepaar, welches keine Bedingung zu erfüllen hat. Durch die Punkte G_1 und G_2 wird die Gerade in drei Teile zerlegt, die in drei von den vier Quadranten liegen, welche durch die beiden Projektionsebenen gebildet werden. In der Zeichnung wird jener Teil von g'', der die Projektion des sichtbaren, also vor der Aufrißebene liegenden Teiles von g bildet, voll ausgezogen, die Projektion des unsichtbaren Teiles nur gestrichelt ausgezogen. Liegt der sichtbare Teil nicht ganz über der Grundebene (Fig. 7), so mag der untere Teil feiner ausgezogen sein. Im Grundrisse g' wird ebenfalls der sichtbare Teil der Geraden g vom unsichtbaren unterschieden. Dabei ist aber zu beachten, ob Übersicht (Fig. 7) vorausgesetzt ist, wo der über der Grundebene liegende Teil sichtbar ist, oder Untersicht (Fig. 8), wo der unter der Grundebene liegende Teil sichtbar ist.

δ) Im Schnittpunkte von g' und g'' sind Grund- und Aufriß eines Punktes K der Geraden g vereinigt. Alle Punkte, für welche sich Grund- und Aufriß decken, liegen auf einer Ebene, welche durch die Bildachse y geht und bei Übersich unter $\pi/_4$ nach rückwärts (bei Untersicht nach vorne) ansteigt. Sie heißt Koinzidenzebene. Der Punkt K ist also der Schnittpunkt der Geraden g mit der Koinzidenzebene.

ε) Verbindet man in der Zeichnung die Punkte G_1 und G_2, so schneidet diese Verbindungsgerade die Bildachse y in einem Punkte, durch welchen ein Ordner geht, auf dem die Projektionen L' und L'' eines Punktes L symmetrisch zur Bildachse liegen (Fig. 7 und 8). Alle Punkte, für welche Grund- und Aufriß symmetrisch zur Bildachse y liegen, befinden sich auf einer Ebene, welche durch die Bildachse geht und bei Übersicht unter $\pi/_4$ nach vorne (bei Untersicht nach rückwärts) ansteigt. Sie heißt Symmetrieebene. Der Punkt L ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der Symmetrieebene.

Aus der Figur 7 oder 8 ist unmittelbar folgende Beziehung zu ersehen:

$$\frac{G_1 K'}{G_2' K'} = \frac{G_1'' K''}{G_2 K''} = \frac{G_1 G_1''}{G_2' G_2} = \frac{G_1 Y}{G_2 Y} = \frac{G_1 L'}{G_2' L'} = \frac{G_1'' L''}{G_2 L''}.$$

Die Punkte K', L' (K'', L'') teilen die Strecke $G_1 G_2'(G_1'' G_2)$ außen und innen im gleichen Verhältnisse; die beiden Punktepaare liegen harmonisch. Es ist dann auch das Teilverhältnis

$$\frac{G_1 K}{G_2 K} = -\frac{G_1 L}{G_2 L}.$$

Die Spuren G_1, G_2 einer Geraden g und die Schnittpunkte K, L mit der Koinzidenz- und Symmetrieebene liegen harmonisch.

3. Sind die Spuren G_1, G_2 einer Geraden g gefunden oder von vornherein gegeben, so kann man sofort „durch die Gerade g eine Ebene ε legen". Wenn eine Gerade g auf einer Ebene ε liegen soll, so müssen nämlich die Spuren G_1, G_2 der Geraden auf den gleichartigen Spuren e_1, e_2 der Ebene liegen. Man hat also die Spuren der Ebene so zu wählen, daß einerseits e_1 durch G_1, e_2 durch G_2 geht und anderseits so, daß e_1, e_2 sich in einem Punkte Y der Bildachse y schneiden.

Sind zwei Ebenen durch ihre Spuren gegeben, so erhält man als Spuren ihrer Schnittgeraden die Schnittpunkte der gleichartigen Spuren der Ebenen.

Zur Übung: Es sind Geraden abzubilden (etwa durch die Spuren G_1 und G_2 anzunehmen), welche je einen andern der vier Quadranten nicht durchsetzen, und es ist die Lage eines Punktes zu verfolgen, welcher eine solche Gerade durchläuft.

§ 3. Verschieben und Weglassen der Bildachse.

1. Ein Punkt P und eine Gerade g seien im Grund-, Auf- und Kreuzrisse gegeben (Fig. 9). Denkt man sich nun die Bildachse y um eine Strecke a nach aufwärts in die Lage y_a verschoben, so entspricht dem ein Heben der Grundebene um die Strecke a und bei Übersicht ein Verschieben der Aufrißebene nach rückwärts um dieselbe Strecke a (bei Untersicht nach vorne). Die Koinzidenzebene ändert dabei ihre Lage nicht. Im Kreuzrisse von rechts hat die Koinzidenzebene $\varkappa$ eine Spur k_3, welche durch den Ursprung O unter $\pi/_4$ nach rechts aufwärts geht (bei negativem Kreuzrisse nach links aufwärts). Jeder Punkt K der Koinzidenzebene hat seinen Kreuzriß auf dieser Spur. Der Schnittpunkt der Horizontalen durch P' und der

Vertikalen durch P''' liegt (wie aus der Fig. 9 zu ersehen ist) auch immer auf k_3. Die Punkte P', P'', P''' bilden also immer drei Eckpunkte eines Rechteckes, dessen vierter Eckpunkt auf k_3 liegt. Im umgelegten Kreuzrisse gehen die x- und z-Achse in die Lagen x_a und z_a über. In der Zeichnung kommt also der Punkt O in die Lage O_a. Die Kreuzrißebene rückt um dieselbe Strecke a nach rechts weiter (bei negativem Kreuzrisse nach links), während die Koinzidenzebene für Aufriß und Kreuzriß wieder ungeändert bleibt.

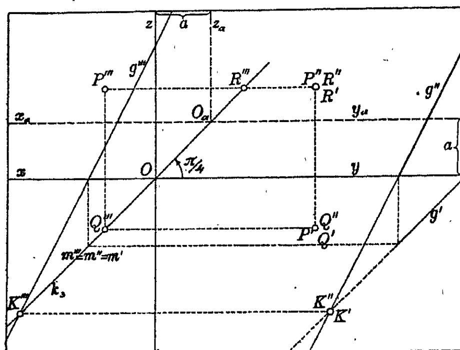


Fig. 9.

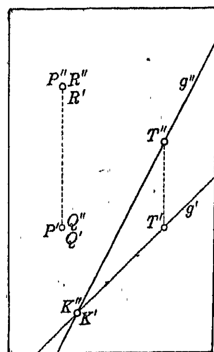


Fig. 10.

Der Ursprung O des Achsensystemes rückt im Raume auf der Diagonalen m des Würfels mit der Kante a weiter, für welche $m' = m'' = m'''$ ist.

Zur Übung: Es ist ein Rechteck mit einer vertikalen Seite $P'P''$ und einer horizontalen Seite $P''P'''$ gegeben. Wo kann der Ursprung O im Raume, bzw. in der Abbildung liegen, je nachdem Grundriß und Kreuzriß positiv oder negativ vorausgesetzt werden?

2. Handelt es sich zunächst bloß darum, auf die Gerade $g(g', g'')$ einen Punkt $T(T', T'')$ zu legen, so ist diese Aufgabe von der Verschiebung der Bildachse y ganz unabhängig und kann auch ausgeführt werden, wenn gar keine Bildachse angenommen ist. Man hat eben nur (Fig. 10) einen Ordner parallel zu $P'P''$ zu ziehen und erhält die Projektionen T', T'' eines Punktes T, der auf g liegt, in den Schnittpunkten des Ordners mit g' und g''.

Läßt man die Bildachse y des Zweibildersystemes ganz weg, so ist keine bestimmte horizontale Ebene

als Grundebene und keine bestimmte frontale Ebene als Aufrißebene vorausgesetzt*). Die Koinzidenzebene $\varkappa$ hat aber schon eine bestimmte Lage gegen das Raumgebilde $[Pg]$. Sie trifft (Fig. 9) den von oben kommenden Sehstrahl des Punktes P in einem Punkte Q, welcher um $P'P''$ tiefer liegt als P, und den von vorne kommenden Sehstrahl des Punktes P in einem Punkte R, der bei Übersicht um $P'P''$ weiter rückwärts (bei Untersicht weiter vorne) liegt als P. Sie trifft die Gerade g im Punkte K, für welchen $K' = K''$ ist. Man kann übrigens auch die beiden Bilder in der Richtung der Ordner auseinanderrücken, ohne den Zusammenhang zu stören.

Es wird sich zeigen, daß eine ganze Reihe von Aufgaben ohne Bildachse ausgeführt werden kann, während andere Aufgaben ohne Bildachse nicht lösbar sind, wohl aber bei geeigneter Wahl der Bildachse eine vereinfachte Lösung zulassen. Tatsächlich findet man in technischen Zeichnungen zumeist keine Bildachse.

§ 4. Zwei Punkte, ihre Verbindungsgerade und die Strecke.

1. Zwei Punkte P, Q seien durch ihre Projektionen P', P'' und $Q'. Q''$ gegeben.

„Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade." „Die Projektionen der Verbindungsgeraden zweier Punkte sind die Verbindungsgeraden der gleichartigen Projektionen der Punkte."

Es ist also $P'Q' = g'$ der Grundriß und $P''Q'' = g''$ der Aufriß der Verbindungsgeraden $PQ = g$. Die Projektionen der Verbindungsgeraden g zweier Punkte P, Q und der von diesen Punkten begrenzten Strecke s können also ohne Bildachse gefunden werden.

Besondere Fälle: Wenn der Aufriß $P''Q''$ der Verbindungsgeraden eine horizontale Gerade h'' ist, so ist die Verbindungsgerade h selbst zur Grundebene parallel — horizontal; wenn der Grundriß $P'Q'$ der Verbindungsgeraden eine horizontale Gerade f' ist, so ist die Verbindungsgerade f selbst zur Aufrißebene parallel — frontal (Fig. 11).

---

*) Das räumliche Achsensystem ist nur bis auf gewisse Parallelverschiebungen bestimmt.

Wenn die Punkte P' und Q' zusammenfallen, also der Grundriß der Verbindungsgeraden unbestimmt ist*), dann ist die Gerade zur Grundebene normal. Bei Vereinigung von P'' und Q'' ist die Verbindungsgerade zur Aufrißebene normal.

2. Für Strecken, welche auf derselben Geraden liegen, können die einfachen Operationen (addieren, vervielfachen, teilen nach einem gegebenen Verhältnisse) unmittelbar im Grund- und Aufrisse ausgeführt werden, und zwar ebenfalls ohne Bildachse.

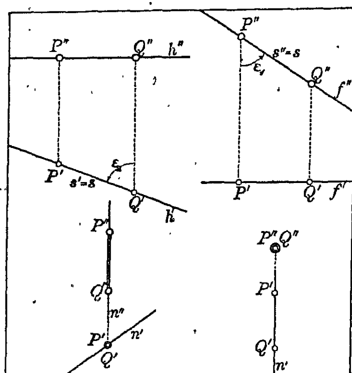


Fig. 11.

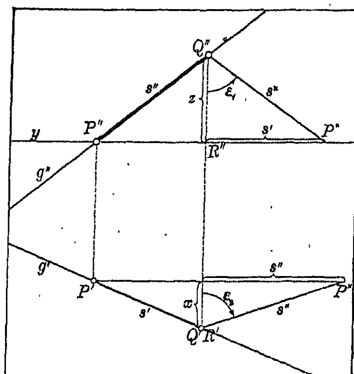


Fig. 12.

Betrachtet man die Strecke PQ als Vektor (Abbild einer Kraft), welcher den Anfangspunkt (Angriffspunkt) P und die Richtung von P nach Q hat, so kann für Vektoren, welche auf derselben Geraden liegen, das Zusammensetzen und Zerlegen im Grund- und Aufrisse vorgenommen werden.

3. Die Orthogonalprojektion einer Strecke, welche zur Projektionsebene parallel ist, ist eine gleiche Strecke. Für eine horizontale Gerade h ist der Grundriß s' einer Strecke, für eine frontale Gerade f ist der Aufriß s'' einer Strecke der wahren Größe s dieser Strecke gleich. Insbesondere erscheinen die Strecken, welche zur x-Achse

*) Wählt man eine beliebige Gerade durch P' als Grundriß, so wird die Zuordnung der beiden Punktreihen eine ausgeartete, weil allen Punkten von n'' der Punkt P' entspricht und nur dem uneigentlichen Punkte von n'' alle Punkte von n' entsprechen.

(z-Achse) parallel sind, im Grundrisse (Aufrisse) in wahrer Größe. In diesen besonderen Fällen ist die wahre Größe der Strecke PQ unmittelbar auch ohne Bildachse bekannt.

Bei allgemeiner Annahme (Fig. 12) kann die wahre Größe der Strecke $PQ = s$ durch Zurückführung auf die vorerwähnten besonderen Fälle gefunden werden. Die Zurückführung ist aber ohne Bildachse nicht ausführbar. Wir wählen also eine Bildachse y etwa durch P'', so daß die Grundebene durch den Punkt P geht. Der Sehstrahl des Punktes Q schneidet diese Grundebene in einem Punkte R. Die Strecke PQ ist dann die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks PQR, wobei die Kathete PR eine horizontale Strecke und die Kathete QR zur z-Achse parallel ist. Es ist also

$$PR = s'$$

und $QR = Q''R'' = z$.

Trägt man nun s' von R'' aus auf der Geraden y bis $P^\times$ auf, so ist die Hypotenuse $Q''P^\times = s^\times$ der wahren Größe der Strecke s gleich. Man kann dies auch so auffassen, daß das Dreieck PQR um die Seite QR so lange gedreht wird, bis es zur Aufrißebene parallel wird. Es ergibt sich dabei auch die wahre Größe des Einfallswinkels ε_1 der Geraden g gegen die Grundebene. Es ist

Fig. 13.

$$s = \sqrt{s'^2 + z^2} \quad \text{und} \quad s' = s \cdot \sin \varepsilon_1 .$$

Die Längenverzerrung für alle Strecken der Geraden g im Grundriß ist also

$$\lambda = \frac{s'}{s} = \sin \varepsilon_1 .$$

In gleicher Weise kann man die Bildachse durch P' legen, so daß die Aufrißebene durch P geht. Dabei erhält man

$$s = \sqrt{s''^2 + x^2} \quad \text{und} \quad s'' = s \cdot \sin \varepsilon_2 .$$

Der Normalriß einer Strecke ist eine gleiche oder kleinere Strecke oder Null, je nachdem die Strecke

im Raume zur Projektionsebene parallel, geneigt oder normal ist

Ganz analog ist die Ausführung, wenn Aufriß und Kreuzriß gegeben ist (Fig. 13).

Umkehrungsaufgaben: 1. Es ist auf einer Geraden g von einem Punkte P aus eine Strecke s aufzutragen. Man legt zuerst auf die Gerade einen zweiten Punkt Q, sucht die wahre Größe $P^{\times}Q''$ der Strecke PQ, trägt von $P^{\times}$ aus die gegebene Strecke bis S_I oder S_{II} (zwei Lösungen) auf und zieht durch diese Punkte Horizontalen, welche g'' im Aufrisse der möglichen Endpunkte schneiden.

2. Die wahre Größe und der Aufriß einer Strecke PQ, ferner der Grundriß P' des einen Endpunktes der Strecke sind gegeben (2 Lösungen).

3. Es ist durch einen Punkt Q eine Gerade g zu legen, welche gegebene Einfallswinkel ε_1 und ε_2 hat (4 Lösungen).

4. Es soll noch der besondere Fall betrachtet werden, daß die Projektionen P', P'' und Q', Q'' der beiden Punkte auf demselben Ordner liegen. Auf diesem Ordner liegen dann die beiden Projektionen d' und d'' der Verbindungsgeraden. Die Verbindungsgerade d liegt auf einer doppelt projizierenden (zur Grund- und Aufrißebene normalen, zur Kreuzrißebene parallelen) Ebene. Da die beiden projizierenden Ebenen zusammenfallen, so ist hier die Gerade d durch ihre Projektionen d' und d'' allein nicht bestimmt. Bei Angabe der Punkte P, Q ist aber die Gerade bestimmt*).

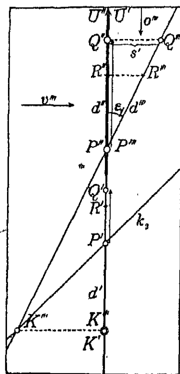


Fig. 14a.

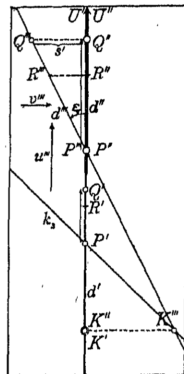


Fig. 14b.

Wird die Punktreihe d im Sinne von P nach Q durchlaufen, so wird der Grundriß d' im Sinne von P' nach Q' und der Aufriß d'' im Sinne von P'' nach Q'' durchlaufen. Diese beiden Reihen d', d'' sind auf derselben Geraden vereinigt, und zwar gleichlaufend (Fig. 14) oder ungleichlaufend (Fig. 15).

*) Die Projektionen U', U'' des uneigentlichen Punktes U von d sind im uneigentlichen Punkte der Ordner vereinigt. Man kann diesen Punkt das Zenith der Zeichenebene nennen. Durch bloße Angabe, daß U' und U'' ins Zenith der Zeichenebene fallen, ist dann ebenfalls der uneigentliche Punkt U nicht bestimmt.

Es soll nun ein Kreuzriß von rechts hergestellt werden, so daß die z-Achse durch den Punkt P geht, wobei P''' mit P'' zusammenfällt. Der Punkt Q liegt im ersten Falle bei Übersicht (Fig. 14a) um die Strecke $P'Q'$ weiter rückwärts [bei Untersicht (Fig. 14b) weiter vorne]; es ist also die Strecke $s' = P'Q'$ auf dem horizontalen Ordner des Punktes Q'' nach rechts [links] aufzutragen. Im zweiten Falle ist es umgekehrt. Die Gerade $P'''Q'''$ ist der Kreuzriß d'''. Damit hat man die wahre Größe der Strecke $PQ = P'''Q'''$ und den Einfallswinkel ε_1 der Geraden d gegen die Grundebene gefunden. Es ist

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{P'Q'}{P''Q''} = \frac{s'}{s''}; \quad \text{also ist } \varepsilon_1 \lesseqgtr \frac{\pi}{4}, \quad \text{je nachdem } s' \lesseqgtr s''.$$

Für $\varepsilon_1 = \pi/_4$ sind die Reihen d' und d'' **kongruent**. Nun kann man auch zum Aufrisse R'' eines Punktes R der Geraden d den Grundriß R' finden, indem man $R''R''' = P'R'$ macht. (Durch den Ordner allein ist es hier nicht möglich.) Nicht bloß für U, sondern auch für den Schnittpunkt K der Geraden d mit der Koinzidenzebene $\varkappa$ sind Grund- und Aufriß vereinigt. Um den Punkt K zu konstruieren, suchen wir die Kreuzrißspur k_3 der Koinzidenzebene. Da die angenommene z-Achse durch P geht, hat jeder Punkt der z-Achse seinen Grundriß in P'; daher fällt der Ursprung O auch mit P' zusammen. Die Kreuzrißspur k_3 geht durch O unter $\pi/_4$ nach rückwärts ansteigend bei Übersicht, dagegen nach vorne ansteigend bei Untersicht. Aus dem Schnittpunkte K''' von d''' mit k_3 erhält man durch einen horizontalen Ordner den Punkt $K' = K''$.*)

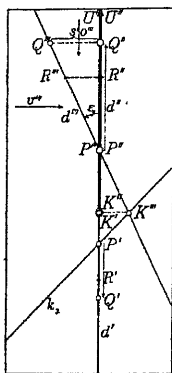


Fig. 15 a.

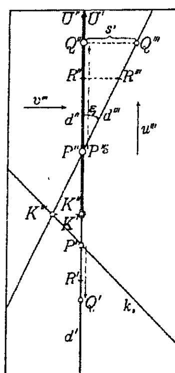


Fig. 15 b.

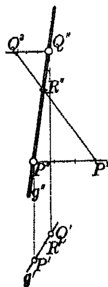
Denkt man sich die Gerade d als undurchsichtige Stange und beachtet man die Richtungen der Sehstrahlen o, u, v, so ergibt sich:

*) Ist $\varepsilon_1 = \pi/_4$ und sind die Reihen d', d'' gleichlaufend, so fällt $K' = K''$ mit $U' = U''$ zusammen; sind aber die Reihen ungleichlaufend, so liegen alle Paare P', P'' symmetrisch zu $K' = K''$.

Wenn die Punktreihen d', d'' gleichlaufend vereinigt sind, so ist die Gerade d bei Übersicht nach rückwärts [bei Untersicht nach vorne] ansteigend. Sie verläuft im Nebenwinkel der einfallenden Sehstrahlen; daher ist im Grund- und Aufrisse dieselbe Seite der Geraden sichtbar.

Wenn die Punktreihen d', d'' ungleichlaufend vereinigt sind, so ist die Gerade d bei Übersicht nach vorne [bei Untersicht nach rückwärts] ansteigend. Sie verläuft im Winkel der einfallenden Sehstrahlen; daher sind im Grund- und Aufrisse verschiedene Seiten der Geraden sichtbar.

5. Ist die Gerade g nur annähernd zur Kreuzrißebene parallel, insbesondere g'' beinahe parallel zu z (Fig. 15c), so wird die Aufsuchung des Aufrisses R'' aus dem Grundrisse R' ungenau, weil g'' vom Ordner des Punktes R' unter einem sehr spitzen Winkel geschnitten wird. Um R'' genauer zu finden, kann man den Umstand benützen, daß $P''Q''$ durch R'' im selben Verhältnisse geteilt wird, wie $P'Q'$ durch R'. Zieht man daher durch P'' und Q'' Horizontale und trägt man von P'' aus die Strecke $P'R'$ etwa dreimal auf, ferner von Q'' aus die Strecke $Q'R'$ ebensooft in entgegengesetzter Richtung, so schneidet die Verbindungsgerade der erhaltenen Endpunkte P^3, Q^3 die Gerade g'' im verlangten Punkte R''. Der Vorgang läßt sich auch für die Gerade d anwenden.


Fig. 15c.

§ 5. Zwei Gerade, welche durch einen Punkt gehen. Abbildung und Umlegung der Ebene; Winkel und Abstand.

1. Zwei Gerade a, b, welche durch einen Punkt P gehen, seien durch ihre Projektionen gegeben, so daß der Schnittpunkt P' von a' und b' mit dem Schnittpunkte P'' von a'' und b'' auf einem Ordner liegt (Fig. 16).

Die zwei Geraden, welche durch einen Punkt gehen, bestimmen eine Verbindungsebene. Im Zweibildersysteme wird die Ebene gewöhnlich in dieser Weise angegeben.

Als besonderer Fall dieser Angabe ist jener zu betrachten, in welchem a parallel zu b, also P ein uneigentlicher Punkt

ist. Es ist dann (§ 2, 2_β) auch a' parallel zu b' und a'' parallel zu b'' (Fig. 17).

Die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden sind parallel.

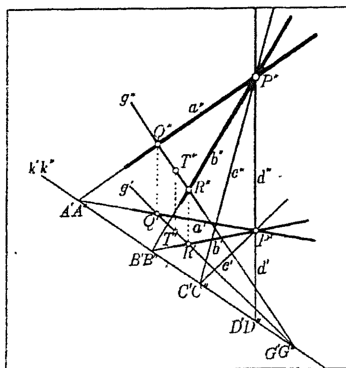


Fig. 16.

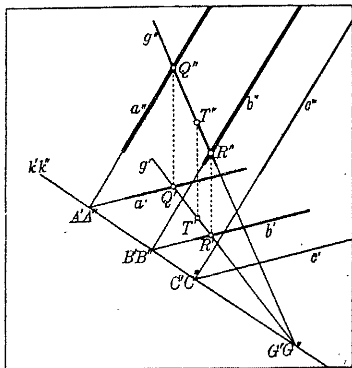


Fig. 17.

2. Inzidenz einer Geraden oder eines Punktes mit der gegebenen Ebene. Soll eine Gerade g auf die gegebene Ebene gelegt werden, so kann man die eine Projektion z. B. g'' beliebig wählen. Die Gerade g schneidet die Geraden a, b in den Punkten Q, R, deren Grundrisse Q', R' sich durch je einen Ordner aus Q'', R'' ergeben. Die Verbindungsgerade $Q'R'$ ist der Grundriß g' der Geraden g. Um einen Punkt T auf die Ebene zu legen, legt man zuerst auf die Ebene eine Gerade g und dann auf diese den Punkt T.

Dieselbe Ebene wäre auch bestimmt gewesen durch die Annahme von $P\,(P', P'')$ und $g\,(g', g'')$ oder durch die Annahme der drei Punkte $P\,(P', P'')$, $Q\,(Q', Q'')$, $R\,(R', R'')$.

$$[aPb] = [Pg] = [PQR].$$

Eine besondere Gerade der Ebene erhält man, wenn man den Koinzidenzpunkt A von a mit dem Koinzidenzpunkte B von b verbindet. Es ergibt sich da die Schnittgerade k der Ebene ε mit der Koinzidenzebene $\varkappa$. Für diese Gerade und für jeden ihrer Punkte fällt der Grundriß mit dem Aufrisse zusammen. Die Projektionen g' und g'' einer jeden Geraden g der Ebene schneiden sich in einem Punkte $G' = G''$ der Geraden $k' = k''$.

Nun kann auch leicht auf die Ebene eine Gerade c gelegt werden, welche durch den Punkt P geht, obwohl das allgemeine Verfahren hier versagt. Man sucht den Schnittpunkt C'' von c'' mit k'' und verbindet diesen Punkt, der zugleich C' ist, mit P'.

Grund- und Aufriß eines Strahlbüschels $[P\varepsilon]$ sind perspektive Strahlbüschel P' und P'', wobei die Koinzidenzgerade $k' = k''$ die Perspektivachse ist*). Der Ordner des Punktes P ist ein selbstentsprechender Strahl als vereinigte Projektionen d', d'' der Geraden d des Büschels, welche zur Kreuzrißebene parallel ist.

Zur Übung: 1. Es ist das Strahlenpaar des Büschels P zu suchen, welches im Grund- und Aufrisse unter einem Rechtwinkel oder unter einem anderen gegebenen Winkel (etwa $\pi/_3$) erscheint.

2. Es ist eine zur Kreuzrißebene parallele Gerade d durch zwei Punkte $Q\,(Q', Q'')$ und $R\,(R', R'')$ gegeben. Man soll zum Aufrisse T'' eines Punktes T dieser Geraden den Grundriß T' finden, ferner den Schnittpunkt K der Geraden mit der Koinzidenzebene (§ 4, 4) durch Annahme eines Punktes S, der nicht auf d liegt, als Scheitel eines Strahlbüschels der Verbindungsebene Sd. Dabei kann S auch ein uneigentlicher Punkt sein.

3. Projektion und wahre Größe eines Winkels. Auf der Ebene $\varepsilon = [ab]$ gibt es je ein Parallelstrahlbüschel von Horizontalen h und Frontalen f. Für eine Horizontale h ist der Aufriß h'' und für eine Frontale f ist der Grundriß f' horizontal anzunehmen, woraus dann h' oder f'' gefunden werden kann.

Um die wahre Größe des Winkels ab zu finden, dreht man die Ebene ε um die Horizontale h so lange, bis sie selbst horizontal ist (Fig. 18), oder man dreht die Ebene ε um die Frontale f so lange, bis sie selbst frontal ist (Fig. 19). Diesen Vorgang nennt man die Umlegung der Ebene ε.

Durch den Punkt P geht eine Gerade m, welche zu allen Horizontalen (also auch zur Grundspur e_1) senkrecht ist. Sie wird Fallinie oder Spurnormale genannt. Ihr Fußpunkt auf h sei M. Die in M zu h errichtete Normalebene ist zur Grundebene normal und enthält sowohl m als auch den Grundriß m'. Alle Geraden dieser Normalebene (auch m') sind zu h senkrecht und haben m' als Grundriß. Daraus folgt:

*) Über einige einfache Begriffe aus der „projektiven Geometrie" kann z. B. nachgesehen werden bei „Böger, Geometrie der Lage, Sammlung Schubert VII" oder K. Doehlemann, Projektive Geometrie, Sammlung Göschen (4. Aufl., 1918).

Der Grundriß jeder Geraden, welche zu einer Horizontalen h normal ist (wenn auch windschief), ist zu h' normal; der Aufriß jeder Geraden, welche zu einer Frontalen f normal ist (wenn auch windschief), ist zu f'' normal.

Der Abstand PM des Punktes P von der Geraden h ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, welches $P'M'$ als eine Kathete und den Höhenunterschied z der Punkte P und M als zweite Kathete besitzt. Es kann im Grundrisse oder im Aufrisse konstruiert werden und enthält den Neigungswinkel ε_1 der Ebene gegen die Grund-

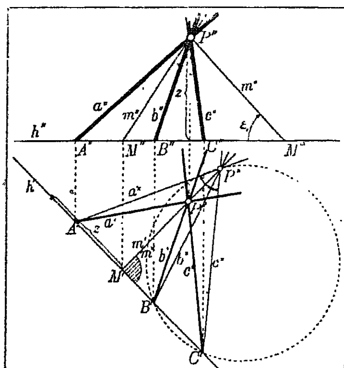


Fig. 18.

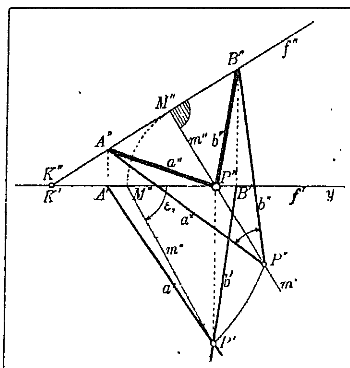


Fig. 19.

ebene. Die Umlegung $m^\times$ der Spurnormalen fällt mit dem Grundrisse m' zusammen. Trägt man nun den gefundenen Abstand PM von M' aus auf, so erhält man die Umlegung $P^\times$ des Punktes P.

Die Geraden a, b schneiden die Horizontale h in den Punkten A, B. Diese bleiben bei der Umlegung der Ebene ungeändert. Verbindet man daher $P^\times$ mit A' und B', so erhält man die Umlegungen $a^\times$, $b^\times$ der Geraden a, b, womit die wahre Größe des Winkels ab gefunden ist.

Umkehrung: Auftragen eines Winkels bc.

Es sind nun die folgenden Beziehungen leicht einzusehen:

a) Die Projektion eines gestreckten Winkels ist wieder ein gestreckter Winkel; die Projektionen zweier Nebenwinkel sind wieder Nebenwinkel. Wenn daher die Projektion eines

Winkels ein größerer, gleicher oder kleinerer Winkel ist, so ist die Projektion des Nebenwinkels ein kleinerer, bezw. gleicher oder größerer Winkel.

β) Der Grundriß (Aufriß) eines Rechtwinkels ist nur dann ein Rechtwinkel, wenn ein Schenkel horizontal (frontal) ist.

γ) Wenn A und B auf verschiedenen Seiten von M liegen (Fig. 18), so ist der Normalriß des Winkels P des Dreieckes APB stets größer als der Winkel selbst.

δ) Wenn B und C auf derselben Seite von M liegen, so ist der Grundriß des Winkels P des Dreieckes BPC ein größerer, gleicher oder kleinerer Winkel, je nachdem der Umkreis des Dreieckes $B'P^{\times}C'$ den Punkt P' einschließt, enthält oder ausschließt.

Die Umlegung einer Ebene z. B. um eine frontale Gerade f kann dadurch etwas vereinfacht werden, daß man den Grundriß f' durch den Aufriß P'' legt (Fig. 19), also eine Grundebene wählt, welche durch P geht. Ist nun $K'=K''$ der Schnittpunkt von f' und f'', so ist die Strecke

$$KP=K'P'=K''P^{\times}.$$

Ein Kreis, welcher K' als Mittelpunkt und $K'P'$ als Radius hat, schneidet daher die Spurnormale $m''=m^{\times}$ in der Umlegung $P^{\times}$ des Punktes P.*)

Beim Winkel ist auch die Ausführung der Operationen (z. B. Teilen) ohne Bildachse nicht möglich.

Zur Übung: 1. Es ist eine Horizontalebene um eine Gerade h so lange zu drehen, bis die Projektion eines Winkels APB derselben, für welchen A und B auf derselben Seite von M liegen,

α) eine bestimmte Größe hat, β) so groß wie der Winkel selbst ist, γ) ein Extrem wird.

2. Ebenso, bis die Projektion eines Spitzwinkels APB, für welchen A und B auf verschiedenen Seiten von M liegen, ein Rechtwinkel wird.

3. Es ist eine Ebene und auf ihr ein Punkt gegeben. Dieser Punkt soll der Scheitel eines Winkels von $\pi/_3$ sein, dessen Projektion ebenfalls $\pi/_3$ sein soll.

4. Es sind die Halbierungsgeraden eines Winkels und seines Nebenwinkels zu konstruieren.

5. Es ist ein gegebener Winkel in eine Anzahl gleicher Teile zu teilen.

---

*) Bei diesem Vorgange ist nur zweimal „Einsetzen der Zirkelspitze“ und „Zeichnen eines Kreises“ notwendig, während der frühere Vorgang sechsmal „Einsetzen“ und „Zeichnen zweier Kreise“ erfordert.

5193

4. Abstand eines Punktes von einer Geraden oder Abstand zweier Parallelen.

Ein Punkt $P(P', P'')$ und eine Gerade $g(g', g'')$ seien gegeben*); man soll von P die Normale n auf die Gerade g fällen und ihren Fußpunkt N sowie den Abstand PN des Punktes P von der Geraden g finden. Zu diesem Zwecke kann man die Verbindungsebene $[Pg]$ um die durch P gehende Horizontale h umlegen (Fig. 20). Dabei bleibt der Punkt P'

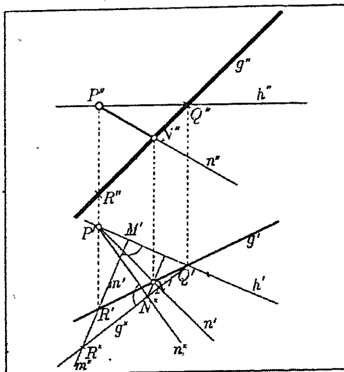


Fig. 20.

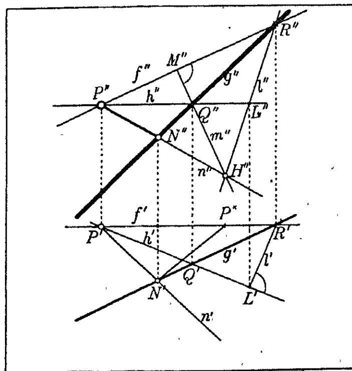


Fig. 21.

und auch der Punkt Q' von g' ungeändert. Sucht man nun die Umlegung $R^{\times}$ des Punktes R von g, dessen Projektionen auf dem Ordner des Punktes P liegen, so ist $Q'R^{\times}$ die Umlegung $g^{\times}$ der Geraden g. Jetzt kann die Normale $n^{\times}$ von P' zu $g^{\times}$ gefällt werden, womit die Umlegung $N^{\times}$ des Fußpunktes und die wahre Größe $P'N^{\times}$ des Abstandes PN gefunden ist. Durch eine Spurnormale ergibt sich N', durch einen Ordner erhält man N'', endlich durch Verbinden die Projektionen n' und n'' der Normalen n.

Wenn es sich hauptsächlich um die Projektionen der Normalen n handelt, ist folgender Vorgang einfacher, bei welchem der allgemeine Fall auf den besonderen Fall der Spurnormalen zurückgeführt wird (§ 5, 3). Man legt auf der Verbindungsebene $[Pg]$ durch den Punkt P die Horizontale h und die Frontale f (Fig. 21). Diese schneiden die Gerade g in den Punkten Q und R. Für das Dreieck PQR denkt man

*) Insbesondere kann die Gerade sein: z oder x, f oder h.

sich nun die Höhen. Für die Höhe m von Q auf f kann m'' senkrecht zu f'' gezogen werden. Für die Höhe l von R auf h kann l' senkrecht zu h' unmittelbar gezeichnet werden; durch den Fußpunkt L erhält man den Aufriß l''. Der Schnittpunkt H'' von l'' und m'' ist der Aufriß des Höhenschnittpunktes H des Dreieckes PQR. Die Gerade $P''H''$ muß daher der Aufriß n'' der Normalen n von P auf g sein. Nun kann aus N'' auch N' und n' gefunden werden. Trägt man vom Ordner des Punktes N aus die Strecke $P''N''$ auf f' bis $P^{\times}$ auf, so ist $P^{\times}N'$ die wahre Größe des Abstandes PN.

Ist der Abstand zweier Parallelen zu suchen, so kann auf der einen von ihnen der Punkt P beliebig gewählt werden, womit die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt ist.

§ 6. Drei Punkte, ihre Verbindungsebene und das Dreieck. Ebene Figur.

α) Verwandtschaft zwischen Grund- und Aufriß einer ebenen Figur.

1. Drei Punkte P, Q, R bestimmen eine Verbindungsebene und ein Dreieck. Bei der Annahme der drei Punkte in der Abbildung müssen die Projektionen eines jeden Punktes auf einem Ordner gewählt werden. Dann schneiden sich aber die Projektionen einer jeden der drei Verbindungsgeraden in einem Punkte einer Geraden $k'k''$, welche die Abbildung der Schnittgeraden k der Ebene mit der Koinzidenzebene ist (Fig. 22). Es ist daher aus der räumlichen Beziehung der planimetrische Satz gezeigt: „Sind die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte zweier Dreiecke parallel, so liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten auf einer Geraden."

Für alle Punkte P und Geraden g der Verbindungsebene ε gilt nun in der Abbildung:

1. Entsprechende Punkte P', P'' liegen auf parallelen Geraden, nämlich auf Ordnern.
2. Entsprechende Gerade g', g'' schneiden sich in Punkten einer Geraden, nämlich der Koinzidenzgeraden $k'k''$.
3. Bei Inzidenz von P' und g' sind auch P'' und g'' inzident.

Durch diese Eigenschaften ist eine Verwandtschaft gekennzeichnet, welche perspektive Affinität heißt.

Grund- und Aufriß einer ebenen Figur (eines Feldes) sind **perspektiv affin** mit den Ordnern als **Affinitätstrahlen** und mit der Koinzidenzgeraden $k'k''$ als **Affinitätsachse** (Brasseur[7]).

In jedem Ordner ist der Grundriß d' und der Aufriß d'' einer zur Kreuzrißebene parallelen Geraden d vereinigt. Rückt die Gerade $d' = d''$ ins Unendliche, so folgt, daß in der uneigentlichen Geraden der Zeichenebene Grund- und Aufriß der uneigentlichen Geraden der Ebene ε vereinigt sind.

2. Für alle Punktepaare der Verwandtschaft ist $\frac{P''D''}{P'D'} = \frac{Q''E''}{Q'E'} = \frac{P''k''}{P'k'} = \delta$ ein konstantes Verhältnis. Diese Zahl δ heißt die **Charakteristik** der perspektiven Affinität.

Die Dreiecke $A''P''B''$ und $A'P'B'$ haben gleiche Basis $A''B'' = A'B'$. Ihre Flächen verhalten sich daher so wie die Höhen $P''k''$ und $P'k'$. Es ist also $\frac{A''P''B''}{A'P'B'} = \delta$. Ebenso ist $\frac{B''R''G''}{B'R'G'} = \delta$ und $\frac{A''Q''G''}{A'Q'G'} = \delta$. Wenn man das 1. und 2. Vorderglied addiert, dann das 3. Vorderglied subtrahiert und für die Hinterglieder dasselbe macht, so erhält man wieder ein gleiches Verhältnis; es ist also

$$\frac{P''Q''R''}{P'Q'R'} = \delta.$$

Da sich jede ebene Figur aus Dreiecken zusammensetzen läßt, so ist allgemein

$$\frac{f''}{f'} = \delta.$$

Das Verhältnis der Flächen des Aufrisses und Grundrisses einer ebenen Figur f ist der Charakteristik der perspektiven Affinität gleich.

3. Im Zweibildersysteme sind nun zwei Hauptstellungen der Ebene zu unterscheiden:

Wenn P' und P'' auf derselben Seite der Affinitätsachse $k'k''$ liegen (Fig. 22a), so findet das für alle Paare entsprechender Punkte statt und die Charakteristik δ ist positiv.

Wenn P' und P'' auf verschiedenen Seiten der Affinitätsachse $k'k''$ liegen (Fig. 22b), so findet das für alle Paare entsprechender Punkte statt und die Charakteristik δ ist negativ.

Auf allen Ordnern sind die Punktreihen d' und d'' gleichlaufend, also (§ 4, 4) alle Geraden d der Ebene bei Übersicht nach rückwärts (bei Untersicht nach vorne) ansteigend. Dabei zeigen die Strahlbüschel P'' und P' sowie die Dreiecke $P''Q''R''$ und $P'Q'R'$ gleichen Durchlaufungsinn.

Auf allen Ordnern sind die Punktreihen d' und d'' ungleichlaufend, also (§ 4, 4) alle Geraden d der Ebene bei Übersicht nach vorne (bei Untersicht nach rückwärts) ansteigend. Dabei zeigen die Strahlbüschel P'' und P' sowie die Dreiecke $P''Q''R''$ und $P'Q'R'$ entgegengesetzten Durchlaufungsinn.

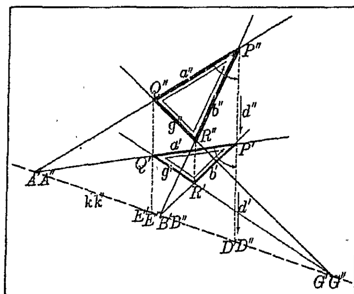


Fig. 22a.

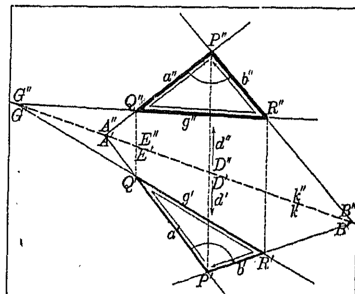


Fig. 22b.

Wenn die Charakteristik einer Ebene **positiv** ist, so ist die Ebene **bei Übersicht nach rückwärts** (bei Untersicht nach vorne) **ansteigend.** Die Ebene verläuft **im Nebenwinkel** der einfallenden Sehstrahlen; daher ist im Grund- und Aufrisse **dieselbe Seite der Ebene sichtbar.**

Wenn die Charakteristik einer Ebene **negativ** ist, so ist die Ebene **bei Übersicht nach vorne** (bei Untersicht nach rückwärts) **ansteigend.** Die Ebene verläuft im **Winkel** der einfallenden Sehstrahlen; daher sind im Grund- und Aufrisse **verschiedene Seiten der Ebene sichtbar.**

Wenn die Ebene durch ihre Spuren gegeben ist (Fig. 23), so läßt der Durchlaufungsinn des Spurendreieckes XYZ die Stellung der Ebene erkennen. Es ist aber hier

noch einfacher, aus der Lage der Spuren einen Schluß zu ziehen. Betrachtet man nämlich den von Y nach aufwärts gehenden Teil der Aufrißspur e_2 und den nach vorne gehenden Teil der Grundspur e_1, so ist die Charakteristik δ positiv,

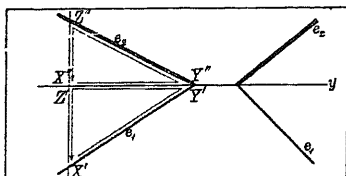


Fig. 23 a.

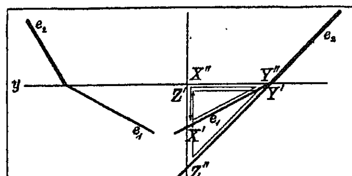


Fig. 23 b.

wenn beide Strahlen nach rechts oder beide nach links gerichtet sind, dagegen negativ, wenn sie nach verschiedenen Seiten gerichtet sind (bei Untersicht ist der nach rückwärts gehende Teil von e_1 zu betrachten).

4. Für besondere Stellungen der Ebene ergeben sich auch besondere Verwandtschaften (Fig. 24):

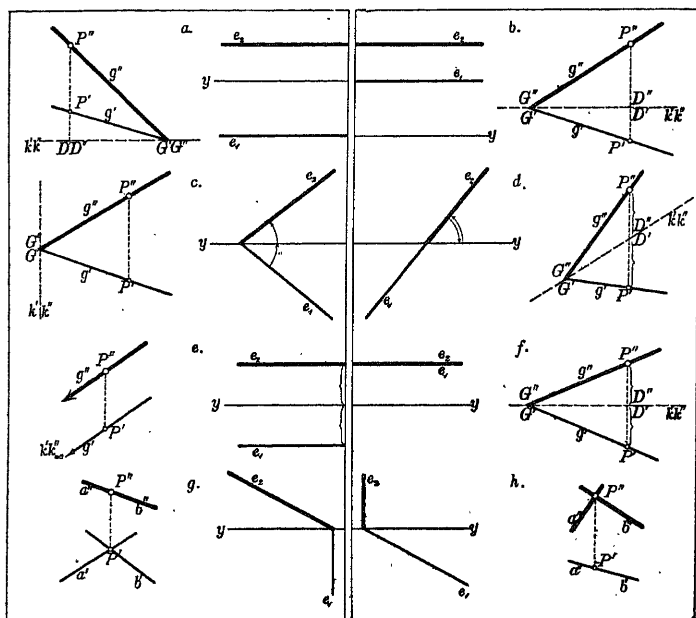


Fig. 24.

a) und b) Wenn die Ebene für die beiden Hauptstellungen zur Kreuzrißebene normal ist, so wird $k'k''$ horizontal, also die Affinitätsachse zu den Affinitätstrahlen senkrecht. Grund- und Aufriß der ebenen Figur sind hier orthogonal perspektiv affin.

c) Wenn die Ebene zur Symmetrieebene normal ist, so schneidet sie die Koinzidenzebene in einer Geraden k, welche selbst zur Symmetrieebene normal, also zur Kreuzrißebene parallel ist. Es ist dann die Affinitätsachse zu den Affinitätstrahlen parallel, $\delta = +1$ und $f' = f''$. Grund- und Aufriß der Figur einer Ebene, welche zur Symmetrieebene normal ist, sind äquivalent perspektiv affin. Die Spuren einer solchen Ebene schließen mit der Bildachse gleiche Winkel ein.

e) Wenn die Ebene zur Koinzidenzebene parallel ist, so wird $k'k''$ zur uneigentlichen Geraden. [Es kann dies als Grenzfall von a) und c) angesehen werden.] Für jede Gerade der Ebene wird daher g'' parallel zu g'; die Figur $f' \cong f''$. Grund- und Aufriß der Figur einer Ebene, welche zur Koinzidenzebene parallel ist, sind kongruent und parallel verschoben.

Für die Koinzidenzebene selbst sind Grund- und Aufriß einer Figur in Deckung.

d) Wenn die Ebene zur Koinzidenzebene normal ist, so schneidet sie die Symmetrieebene in einer Geraden d, welche zur Kreuzrißebene parallel und gegen Grund- und Aufrißebene unter $\pi/_4$ geneigt ist. Eine solche Gerade ergibt ungleichlaufend kongruente Punktreihen. Es ist also $\delta = -1$ und $f' = -f''$. Grund- und Aufriß der Figur einer Ebene, welche zur Koinzidenzebene normal ist, sind schief symmetrisch. Die Spuren einer solchen Ebene fallen in dieselbe Gerade.

f) Wenn die Ebene zur Symmetrieebene parallel ist, so wird $\delta = -1$ und $k'k''$ horizontal. [Es kann dies als Grenzfall von b) und d) betrachtet werden.] Die Figur $f' \cong -f''$.

Grund- und Aufriß der Figur einer Ebene, welche zur Symmetrieebene parallel ist, sind orthogonal symmetrisch.

Für d) und f) ist die Verwandtschaft involutorisch, d. h. wenn man P' als Q'' betrachtet, so ist $P'' = Q'$.

g) Für eine Ebene, welche zur Aufrißebene normal ist, wird die Verwandtschaft ausgeartet, nämlich zu jedem Punkte P' gehört ein Punkt P'', welcher auf der Geraden $a'' = b''$ liegt.

h) Für eine Ebene, welche zur Grundebene normal ist, wird die Verwandtschaft ausgeartet, nämlich zu jedem Punkte P'' gehört ein Punkt P', welcher auf der Geraden $a' = b'$ liegt.

Zur Übung: Es ist eine Ebene anzunehmen, welche gegen alle drei Projektionsebenen gleich geneigt ist, so zwar, daß die drei Spuren in eine Gerade fallen. Auf dieser Ebene ist dann ein Punkt $P(P', P'', P''')$ zu wählen, ferner Q so, daß $Q' = P'''$ und R so, daß $R''' = P'$ wird. Welche Beziehung besteht zwischen den Projektionen des Dreieckes PQR?

β) Verwandtschaft zwischen Normalriß und Umlegung einer ebenen Figur.

5. Es sei ein Dreieck PQR im Grund- und Aufrisse gegeben (Fig. 25). Durch Umlegung der Verbindungsebene der drei Punkte z. B. um eine horizontale Gerade h erhält man ein Dreieck $P^\times Q^\times R^\times$, welches die wahre Form und Größe des Dreieckes zeigt. Zieht man die Spurnormale $R'N'$ zu h' und konstruiert man das rechtwinklige Dreieck, welches die Höhe des Punktes R über der Geraden h als eine Kathete und die Strecke $R'N'$ als zweite Kathete besitzt, so ist die Hypotenuse der Abstand des Punktes R von h. Dieser Abstand wird nach $N'R^\times$ übertragen, um die Umlegung $R^\times$ zu finden. Das rechtwinklige Dreieck enthält den Neigungswinkel ε_1 der Ebene gegen die Grundebene. Die Gerade g' schneidet h' in O', welches mit $O^\times$ zusammenfällt, wodurch man $g^\times$ erhält. Es gilt nun folgende Verwandtschaft:

1. Entsprechende Punkte R', $R^\times$ liegen auf Spurnormalen zu h'.
2. Entsprechende Gerade g', $g^\times$ schneiden sich in Punkten der Geraden h'.
3. Bei Inzidenz von R' und g' sind auch $R^\times$ und $g^\times$ inzident.

Grundriß und Umlegung einer ebenen Figur auf eine horizontale Ebene sind **orthogonal perspektiv affin** mit den Spurnormalen zu h' als **Affinitätstrahlen** und mit der Geraden h' als **Affinitätsachse.** Die **Charakteristik** der Affinität ist $\delta = \dfrac{R'N'}{R^\times N'} = \cos \varepsilon_1$. Die Flächenverzerrung (§ 6, 2) für den Grundriß ist also $\varphi = f'/f = \cos \varepsilon_1$.

6. Durch die Umlegung des Dreieckes sind alle darin vorkommenden Größen, nämlich Seiten, Winkel, Höhen, ... gefunden.

Wenn von dem ursprünglich Gegebenen nur ein Teil bekannt ist und dazu ein Teil des früher Gefundenen, so liegt eine Umkehrungsaufgabe vor. Eine schwierigere Aufgabe dieser Art soll nun behandelt werden. Es sei gegeben: „Der Grundriß $P'Q'R'$ eines Dreieckes, der Aufriß P'' des einen Eckpunktes, ferner der Winkel $Q = 75^0$ und der Winkel $R = 55^0$." Es ist also die Form des Dreieckes bekannt. Denkt man sich die zu P', Q', R' gehörigen Sehstrahlen, so kann die Aufgabe auch so ausgesprochen werden:

„Ein normales dreiseitiges Prisma ist nach einem Dreiecke zu schneiden, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist."

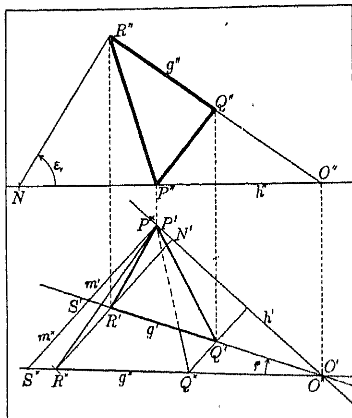


Fig. 25.

Es handelt sich da um die Auffindung der Lage der Ebene PQR, also um die durch P gehende Horizontale h und Spurnormale m. Die Gerade h schneidet die gegenüberliegende Seite g in einem Punkte O und die Gerade m schneidet g in einem Punkte S (Fig. 25). Für alle Strecken der Geraden g ist nun das Verhältnis

$$\frac{O'Q'}{O^\times Q^\times} = \frac{O'R'}{O^\times R^\times} = \frac{O'S'}{O^\times S^\times}$$

ein konstantes. Wenn man daher die Gerade $g^\times$ um den Winkel $\varrho = g'g^\times$ dreht und alle von O ausgehenden Strecken im Verhältnisse $\frac{O'Q'}{O^\times Q^\times}$ verkleinert, so kommen alle Punkte von $g^\times$ mit ihren entsprechenden auf g' zur Deckung. Dreht man die ganze umgelegte Ebene für das Zentrum O' um den Winkel ϱ und verkleinert man alle von O ausgehenden Strecken der Ebene im Verhältnisse $\frac{O'Q'}{O^\times Q^\times}$, so entsteht ein ähnlich verkleinertes Feld. Dabei geht das Dreieck $P^\times Q^\times R^\times$ in ein

ähnliches Dreieck $PQ'R'$ über (Fig. 26) und das rechtwinklige Dreieck $O^{\times}P^{\times}S^{\times}$ in ein rechtwinkliges Dreieck $O'PS'$. Da nun die beiden rechtwinkligen Dreiecke $O'P'S'$ und $O'PS'$ dieselbe Hypotenuse $O'S'$ haben, so liegen die Punkte P' und P auf einem Kreise, welcher $O'S'$ als Durchmesser besitzt.

Nun kann die Umkehrung leicht vorgenommen werden. Man zeichnet über der Seite $Q'R'$ ein Dreieck, welches bei Q' den Winkel $Q = 75^0$ und bei R' den Winkel $R = 55^0$ enthält, also dem gesuchten Dreiecke ähnlich ist. Die Halbierungsnormale der Strecke PP' schneidet g' in dem Mittelpunkte T eines Kreises, welcher durch P und P' geht. Er schneidet die Gerade g' in zwei Punkten O', S', welche mit P' verbunden die Lage von h' und m' ergeben*). Von den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreieckes $O'P'S'$ kann nur jene die Horizontale h' vorstellen, welche durch Vergrößerung aus der entsprechenden Kathete des Dreieckes $O'PS'$ hervorgehen kann (im vorliegenden Beispiele nur $O'P'$). Der Winkel $PO'P'$ ist der Winkel ϱ, um welchen man g' drehen muß, um $g^{\times}$ zu erhalten (man kann gleich den Bogen PP' von S' aus auf dem Kreise übertragen). Durch die Spurnormale $R'N'$ findet man $R^{\times}$. Überträgt man nun $R'N'$ auf h'', zeichnet sodann einen Kreis, welcher N als Mittelpunkt und $N'R^{\times}$ als Radius hat, so erhält man auf dem Ordner von R' zwei mögliche Punkte R''_I und R''_{II}. Die Aufgabe hat somit zwei Lösungen [eigentlich unendlich viele Parallelebenen von zwei Stellungen] (Gugler[8]).

Fig. 26.

Übungsaufgaben: 1. Für ein durch Grund- und Aufriß gegebenes Dreieck ABC ist zu finden: α) der Schwerpunkt S, β) der Höhenschnittpunkt H, γ) der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises M_u,

*) Die Strahlbüschel P' und P sind in perspektiver Lage; h' und m' sind die Normalstrahlen des Büschels P', welchen wieder normale Strahlen des Büschels P entsprechen.

δ) der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises M_e [H, S, M_u liegen auf der Eulerschen Geraden, so daß $HS:SM_u = 2:1$ ist].

2. Die Basis AC eines gleichseitigen Dreieckes ist im Grund- und Aufrisse gegeben. Auf- und Grundriß des Dreieckes sollen: α) orthogonal affin, β) äquivalent affin, γ) schief symmetrisch sein.

3. Der Grundriß $P'Q'R'$ eines gleichschenkligen Dreieckes mit der Spitze P und der Aufriß des Schenkels PQ sind gegeben. Man soll R'' finden (Streckenübertragung).

4. Der Aufriß eines gleichseitigen Dreieckes ABC ist gegeben, ferner B'''. Man soll den Kreuzriß des Dreieckes finden.

5. Der Aufriß eines gleichschenkligen, bei O rechtwinkligen Dreieckes OMN ist gegeben, so daß $O''N''$ aufrecht ist, ferner der Grundriß O'. Es ist der Grundriß des Dreieckes zu finden.

6. Der Grundriß eines Dreieckes ABC ist gegeben, ferner B''. Der Aufriß des Dreieckes soll die Winkel $A'' = (\pi/_6 + \pi/_8)$ und $C'' = (\pi/_4 + \pi/_8)$ enthalten.

7. Auf einer Ebene $\varepsilon = [aPb]$ liegt ein Parallelogramm, welches die Strecken s und t als Seiten hat und einen Punkt Q'' als Aufriß eines Eckpunktes. Das Parallelogramm soll im Grund- und Aufrisse als Rechteck erscheinen.

8. Ein windschiefes Viereck ist mit einer Ebene so zu schneiden, daß die Schnittpunkte ein Parallelogramm von gegebenem Umfange bilden. (Kann durch bloßes Streckenübertragen gelöst werden.)

9. Ein gegebenes Parallelogramm ist im Raume so aufzustellen, daß der Grundriß ein Quadrat wird, von welchem ein Eckpunkt und die Richtung einer Seite gegeben ist.

10. Auf einer Ebene ist ein Viereck zu wählen und außerhalb derselben ein Punkt S. Es ist eine Ebene zu suchen, welche die vierseitige Pyramide nach einem Parallelogramme schneidet, das eine gegebene Seite s enthält.

11. Eine Seite AB eines Sechseckes ist im Auf- und Grundrisse gegeben. Das Sechseck soll im Aufrisse als regelmäßiges Sechseck erscheinen und die Fläche seines Grundrisses soll halb so groß sein, wie jene des Aufrisses (zwei Lösungen).

12. Es ist eine Kraft r in zwei Komponenten p, q zu zerlegen, von welchen die eine in die Richtung der Geraden g fällt, während die andere: α) horizontal, β) zu g normal ist. Welche Lage hat die Ebene des Kräftedreieckes (Hauptstellung und Neigungswinkel)? Wie groß sind die Komponenten und welche Winkel bilden sie mit der Resultierenden?

13. Es ist eine Kraft r in drei Komponenten o, p, q zu zerlegen, von welchen die eine in die Richtung der Geraden g fällt, während die anderen auf zwei frontalen Geraden e und f liegen.

14. Es ist der astatische Mittelpunkt und die Resultierende für drei parallele Kräfte zu suchen, welche nicht auf einer Ebene liegen.

15. Es ist der astatische Mittelpunkt C und die Resultierende r für zwei Kräfte p und q zu suchen, welche in der Richtung der zwei Geraden a und b wirken, aber nicht im Schnittpunkte S der letzteren angreifen, sondern in zwei anderen Punkten A und B.

§ 7. Punkt und Gerade, welche nicht auf einer gegebenen Ebene liegen.

1. Gerade und Ebene bestimmen einen Schnittpunkt; nämlich es gibt nur einen Punkt der Geraden, welcher auf der Ebene liegt, oder es liegen alle Punkte der Geraden auf der Ebene. Für eine Gerade, welche zur Ebene parallel ist, wird ein uneigentlicher Schnittpunkt angenommen.

Es sei nun eine Ebene durch drei Punkte A, B, C bestimmt, welche durch Grund- und Aufriß gegeben sind. Ferner sei eine Gerade g ebenfalls durch Grund- und Aufriß gegeben. Das Dreieck sei als undurchsichtige Figur und die Gerade als Stab vorausgesetzt (Fig. 27).

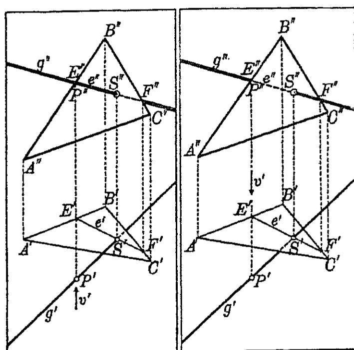


Fig. 27.

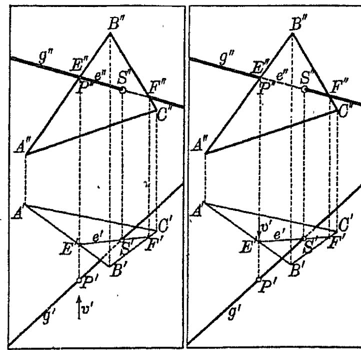


Fig. 28.

Um den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene ABC zu finden, legt man durch die Gerade eine Hilfsebene, am einfachsten eine projizierende, z. B. die zur Aufrißebene normale Ebene. Die Hilfsebene schneidet die gegebene Ebene in einer Geraden e, deren Aufriß e'' mit g'' zusammenfällt. Die Gerade e schneidet die Seiten AB und BC des Dreieckes in zwei Punkten E, F, durch welche man den Grundriß e' leicht finden kann. Da nun e und g auf derselben Ebene liegen, ergeben sie einen Schnittpunkt S und das ist auch der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene ABC.

Der Punkt E'' ist zugleich der Aufriß P'' eines Punktes P der Geraden g. Die beiden Punkte E und P liegen auf demselben Sehstrahle v, dessen Grundriß v' ist, wobei zu unterscheiden ist, ob der vorliegende Grundriß eine Übersicht oder eine Untersicht bedeuten soll. Von den beiden Punkten P

und E ist jener, welcher vom Sehstrahle zuerst getroffen wird, sichtbar, der andere unsichtbar oder gedeckt; man nennt sie daher Deckpunkte.

In Fig. 27 ist die Charakteristik δ positiv. Dann ist bei Übersicht der Punkt P vor dem Punkte E, also auch vor der Ebene ε. Da nun die Ebene nach rückwärts ansteigt, so ist der Punkt P sicher auch über der Ebene. Der Teil der Geraden g, auf welchem der Punkt P liegt, ist in beiden Projektionen sichtbar, der andere Teil aber in beiden Projektionen unsichtbar (gedeckt).

Bei Untersicht ist der Punkt P hinter dem Punkte E, also auch hinter der Ebene ε. Da nun die Ebene nach vorn ansteigt, so ist der Punkt P über der Ebene und deshalb von unten unsichtbar, abgesehen davon, daß nur eine begrenzte Figur da ist. Hier ist der Teil der Geraden g, auf welchem der Punkt P liegt, in beiden Projektionen unsichtbar.

Wenn die Charakteristik einer Ebene **positiv** ist, so ist ein Punkt, der **nicht** auf der Ebene liegt, entweder in **beiden Projektionen sichtbar** oder in **beiden Projektionen unsichtbar.**

In Fig. 28 ist die Charakteristik δ negativ. Dann ist bei Übersicht der Punkt P vor dem Punkt E, also auch vor der Ebene ε. Da nun die Ebene nach vorn ansteigt, so ist der Punkt P sicher auch unter der Ebene. Der Teil der Geraden g, auf welchem der Punkt P liegt, ist im Aufrisse sichtbar, im Grundrisse unsichtbar. Für den anderen Teil ist es umgekehrt.

Bei Untersicht ist der Punkt P hinter dem Punkte E, also auch hinter der Ebene ε. Da nun die Ebene nach rückwärts ansteigt, so ist der Punkt P unter der Ebene und deshalb von unten sichtbar. Hier ist der Teil der Geraden g, auf welchem der Punkt P liegt, im Aufrisse unsichtbar, im Grundrisse sichtbar.

Wenn die Charakteristik einer Ebene **negativ** ist, so ist ein Punkt, der **nicht** auf der Ebene liegt, in der **einen** Projektion **sichtbar** und in der **andern** Projektion **unsichtbar.**

Übungsaufgaben: 1. Durch einen Punkt P ist die Gerade g zu legen, welche zwei windschiefe Gerade a und b schneidet.

2. Parallel zu einer Geraden p ist die Gerade g zu legen, welche zwei windschiefe Gerade a und b schneidet.

3. Es sind drei windschiefe Gerade gegeben Man soll das Parallelepiped suchen, welches seine Kanten auf diesen Geraden hat.

4. Zwei Punkte P, Q und eine Gerade g sind gegeben. Man soll auf den Verbindungsebenen $[Pg], [Qg]$ den kürzesten Weg von P über g nach Q finden.

5. Die Basis AC eines Dreieckes ist im Grund- und Aufrisse gegeben. Die Spitze B des Dreieckes soll auf einer gegebenen Geraden g liegen; Grund- und Aufriß des Dreieckes sollen α) orthogonal affin, β) äquivalent affin, γ) schief symmetrisch sein.

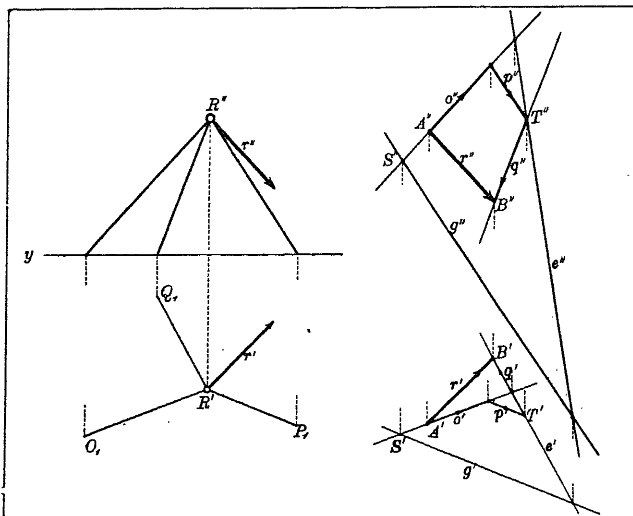


Fig. 29.

6. An dem Scheitel R eines sog. Bockgerüstes (Fig. 29) wirkt eine Kraft r. Es sind die Stabspannungen (Zug oder Druck) für die drei Stäbe RO_1, RP_1, RQ_1 zu ermitteln. Erste Methode: Man zerlegt die Kraft r in zwei Komponenten, von welchen die eine in die Richtung o und die andere in die Ebene $[pq]$ fällt. Die letztere Komponente wirkt also in der Schnittgeraden der Ebenen $[or]$ und $[pq]$, deren Grundspur man als Schnittpunkt von O_1R_1 und P_1Q_1 leicht finden kann. Zweite Methode: Die Strecke AB sei die Abbildung der wirkenden Kraft r. Durch A legt man eine Parallele o zur Stabrichtung RO_1 und durch B eine Parallele q zur Stabrichtung RQ_1. Nun ist als vierte Seite des Kräfteviereckes eine Gerade p einzuschalten, welche zur Stabrichtung RP_1 parallel ist und die Geraden o, q schneidet. Hierfür wählt man auf o einen Punkt S, legt durch ihn eine Parallele g zur Stabrichtung RP_1, sucht den Schnittpunkt T der Ebene $[og]$ mit der Geraden q; dann geht die verlangte vierte Seite p durch T parallel zu g. Aus den Richtungen der die Kraft r ersetzenden Kräfte o, p, q ist zu erkennen, daß der Stab RO_1 auf Zug, dagegen der Stab RP_1 und der Stab RQ_1 auf Druck in Anspruch genommen wird.

2. α) Durch einen Punkt P gibt es zu einer Ebene $\varepsilon = [aQb]$ eine **Normale** n.

Man legt (Fig. 30) durch einen Punkt B von b (etwa gleich jenen, welcher sich durch den Ordner $P'P''$ ergibt) eine Horizontale h und eine Frontale f. Nun kann der Satz von § 5, 3 angewandt werden. Da die Gerade n zu allen Geraden der Ebene ε normal ist, muß der Grundriß n' der Normalen durch P' senkrecht zu h' und der Aufriß n'' durch P'' senkrecht zu f'' gehen. Der Schnittpunkt der Normalen n mit der Ebene ε, den man wieder mit Hilfe einer zur Aufrißebene normalen Ebene finden kann, ist der Fußpunkt N der Normalen n und die wahre Größe der Strecke PN heißt der Abstand des Punktes P von der Ebene ε.

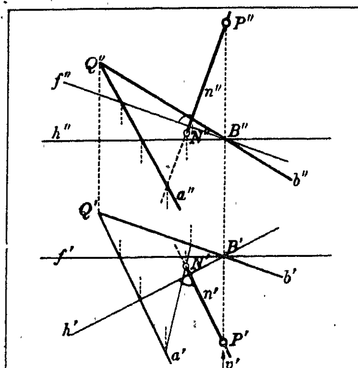


Fig. 30.

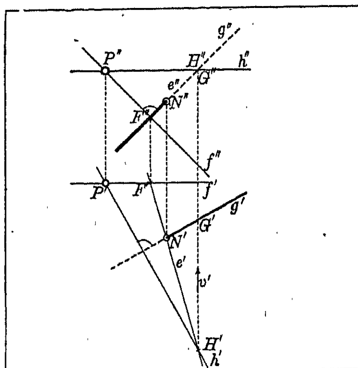


Fig. 31.

β) Durch einen Punkt P gibt es zu einer Geraden g eine **Normalebene** ν.

Die Horizontale h der Normalebene hat (Fig. 31) die Gerade h', welche durch P' senkrecht zu g' geht, als Grundriß und die Horizontale h'' durch P'' als Aufriß. Die Frontale f der Normalebene hat die Horizontale f' durch P' als Grundriß und die Gerade f'', welche durch P'' senkrecht zu g'' geht, als Aufriß. Durch diese zwei Geraden ist die Normalebene bestimmt. Sie wird von der Geraden g in einem Punkte N geschnitten, welchen man wieder durch eine zur Aufrißebene normale Hilfsebene finden kann. Der Schnittpunkt N, ist zugleich der Fußpunkt der Normalen

von P zu g und ergibt sich hier noch einfacher als in Fig. 21 ebenfalls bloß mit dem Rechtwinkelbrett (ohne Zirkel). Die Deckpunkte G, H zeigen, daß G hinter der Ebene liegt, daß also der betreffende Teil der Geraden g im Aufrisse unsichtbar ist. Da die Charakteristik der Ebene negativ ist, so ist dieser Teil der Geraden im Grundrisse sichtbar.

γ) Durch den Punkt P geht eine Parallelebene zu $\varepsilon = [a Q b]$, welche sich sofort ergibt, indem man durch P Parallele zu zwei Geraden (etwa a und b) der Ebene zieht.

Übungsaufgaben: 1. Es sind jene Punkte einer Geraden zu suchen, welche von einer Ebene einen gegebenen Abstand haben.

2. Der Grundriß $P'Q'R'$ eines gleichschenkligen Dreieckes mit der Spitze Q und der Aufriß der Basis PR sind gegeben. Man soll Q'' finden.

3. Es ist eine Kraft in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine senkrecht und die andere parallel zu der durch die Geraden a, b bestimmten Ebene ist.

3. α) Die Normale, welche man im Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ebene zur letzteren errichtet, heißt das Einfallslot der Geraden. Der Winkel, welchen die Gerade mit dem Einfallslote bildet, heißt der Einfallswinkel der Geraden gegen die Ebene und kann nach dem Vorangehenden gefunden werden.

β) Wenn zwei Ebenen durch je zwei sich schneidende Gerade gegeben sind, so kann die Schnittgerade der Ebenen gefunden werden, indem man die Schnittpunkte von wenigstens zweien der gegebenen Geraden mit der anderen der gegebenen Ebenen sucht. Man kann aber auch z. B. eine horizontale Hilfsebene benützen. Eine solche schneidet die beiden gegebenen Ebenen in je einer Horizontalen, deren Schnittpunkt auch ein Punkt der verlangten Schnittgeraden ist. Die Aufsuchung des Neigungswinkels der beiden Ebenen soll später (§ 19, 1) besprochen werden.

4. Es seien zwei windschiefe Gerade a und b durch ihre Projektionen gegeben. Durch jede von ihnen gibt es eine Ebene, welche zur anderen Geraden parallel ist. Ferner gibt es eine gemeinsame Normale n, welche a und b in den Punkten A und B schneidet und zu beiden Geraden senkrecht ist. Auf n ergibt sich der Abstand $AB = z$ der windschiefen Geraden. Legt man durch A eine Parallele b^0 zu b, so entsteht der Winkel $ab^0 = \varrho$ der windschiefen Geraden.

Sind zunächst a und b zur Grundebene parallel (Fig. 32), so erhält man z und ϱ unmittelbar in wahrer Größe. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Nämlich man kann die Gerade a durch Heben um z und Drehen um den Spitzwinkel ϱ entweder im **positiven** oder **negativen** Sinne mit b zur Deckung bringen.

Ein anderer besonderer Fall ist der, daß die eine Gerade eine Horizontale h und die andere Gerade eine Frontale f ist. Um die gemeinsame Normale n zu finden, wählt man z. B. auf f einen Punkt P. Zieht man nun durch P' die Gerade g' senkrecht zu h' und durch P'' die Gerade g'' senkrecht zu f'', so hat man die Projektionen einer Geraden g, welche zur gemeinsamen Normalen n parallel ist. Der Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene $[fg]$ ist der Punkt A, durch welchen die gemeinsame Normale n parallel zu g geht, wodurch sich auch der Punkt B ergibt. Bei allgemeiner Lage der Geraden a und b wählt man etwa auf a einen Punkt P und durch P' eine Bildachse y. Nun legt man durch P die beiden Normalebenen α und β zu den Geraden a und b, so daß die Spur a_2 senkrecht zu a'' und die Spur b_2 senkrecht zu b'' ist. Durch die Schnittpunkte von a_2 und b_2 mit y legt man die Grundspur a_1 senkrecht zu a', bzw. b_1 senkrecht zu b'. Daraus erhält man sofort die Projektionen der Schnittgeraden g der beiden Normalebenen. Die Ebene $[ag]$ schneidet die Gerade b in dem Punkte B, durch welchen die gemeinsame Normale n parallel zu g geht, womit sich auch der Punkt A ergibt*).

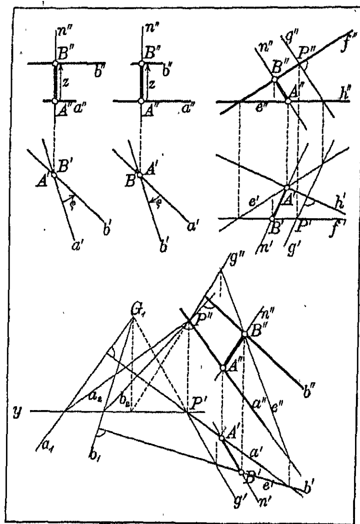


Fig. 32.

Übungsaufgabe: Es ist die besprochene Aufgabe für den Fall auszuführen, daß a' parallel zu b' ist.

*) Bei dieser Konstruktion sind zu zeichnen: 1 Horizontale, 5 Ordner, 4 Normalen, 2 Parallelen und 3 Verbindungsgerade.

Wie nun zu sehen ist, zerfallen die Elementaraufgabe in zwei Gruppen. Die projektiven Aufgaben, bei welche es sich nur um Inzidenz, Verbinden und Schneiden handel sind durchweg (mit Einschluß der Aufgaben über Parallelitä ohne Bildachse ausführbar; die metrischen Aufgaber bei welchen es sich um die wahre Größe von Strecken ode Winkeln handelt, sind im allgemeinen nicht ohne Bildachs ausführbar (durch passende Wahl der Bildachse können Ve einfachungen erzielt werden)[2, 3, 9].

§ 8. Beleuchtungsverhältnisse. Selbstschatten, Schlag schatten; Hellestufen; Spiegelung.

1. Die Raumgebilde (zumeist als undurchsichtig voraus gesetzt) sind eigentlich nur bei Beleuchtung sichtbar. E sollte daher bei der Abbildung immer auf die Beleuchtun

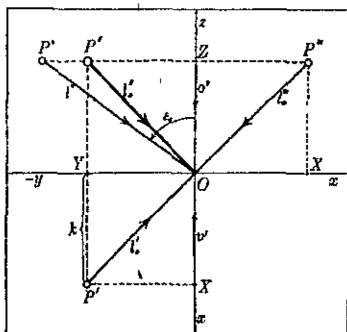


Fig. 33 a.

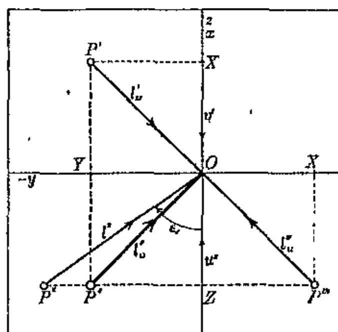


Fig. 33 b.

mehr oder minder Rücksicht genommen werden. [illegible] ist die [illegible] [illegible] Licht[illegible] [illegible] Punkte [illegible] spricht man [illegible] Zen[illegible] [illegible] Parallel- be[illegible] angenommen [illegible] Sonnen- beleuchtung [illegible]. Man setzt [illegible] st[illegible] daß [illegible] Zeichnung die Li[illegible] passend [illegible] kommen.

Bei [illegible] Zeichnung [illegible] man sehr [illegible] die An[illegible] daß die [illegible] Diagonale OP [illegible]

Würfels parallel sind, welcher in das Achsensystem hineinpaßt (Fig. 33a), und zwar in den Oktanten $[+x, -y, +z]$. Bei Untersicht kann aber auch eine Beleuchtung von unten vorausgesetzt werden (Fig. 33b), wofür der Würfel in den Oktanten $[+x, -y, -z]$ paßt. Diese Annahme soll **Diagonalbeleuchtung** genannt werden.

Hier ist also $\sphericalangle yl' = yl'' = \pi/_4$ und $\sphericalangle zl'' = zl''' = \pi/_4$.

Die Länge der Würfelkante sei k. Legt man das rechtwinklige Dreieck OPZ auf die Aufrißebene um, so enthält das Dreieck $OP^{\times}Z$ die Umlegung $l^{\times}$ des Lichtstrahles. Der Winkel, welchen $l^{\times}$ mit dem Sehstrahl o, bzw. u bildet, ist der **Einfallswinkel** ε_1 **der Lichtstrahlen** gegen die Grundebene. Da der Lichtstrahl l gegen alle drei Projektionsebenen gleich geneigt ist, so ist

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 .$$

Nun ist

$$OZ = k, \quad OP' = ZP^{\times} = k \cdot \sqrt{2}, \quad OP^{\times} = k \cdot \sqrt{3};$$

daher ist

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{ZP^{\times}}{OP^{\times}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}81649\ldots,$$

$$\cos \varepsilon_1 = \frac{OZ}{OP^{\times}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0{,}577\ldots,$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{ZP^{\times}}{OZ} = \sqrt{2}.$$

Aus der trigonometrischen Tafel kann jetzt ε_1 entnommen werden.

Bei Diagonalbeleuchtung ist der Einfallswinkel der Lichtstrahlen gegen jede der drei Projektionsebenen

$$\varepsilon_1 \doteq 54^{0}\,45'.$$

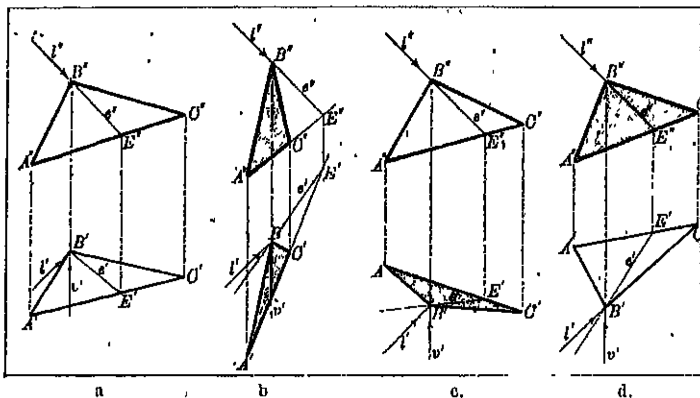
Der **Vorteil** dieser Annahme besteht hauptsächlich darin, daß die Projektionen der Lichtstrahlen durch **bloßes Anlegen** des $\pi/_4$-Dreieckes an die Reißschiene (Bildachse oder Ordner) gezeichnet werden können, während sonst das Parallelenziehen mit zwei Dreiecken geschehen muß. Außerdem ergeben sich bei manchen Konstruktionen **kleine Vereinfachungen**.

2. Beleuchtung einer ebenen Figur.

[illegible] eine **Schattenseite** [illegible]

leuchtet, auf der andern Seite unbeleuchtet — im Selbst schatten. Nur wenn der Lichtpunkt auf der Ebene liegt (di Lichtstrahlen zur Ebene parallel sind), ist die Ebene auf beide Seiten unbeleuchtet — im Streiflichte.

Wenn die Lichtstrahlen auf derselben Seite der Eben einfallen wie die Sehstrahlen, so ist die beleuchtete Seit der Ebene sichtbar, im andern Falle die unbeleuchtet Seite. Um dies in der Zeichnung zu untersuchen, legt man ein Ebene, welche durch den Sehpunkt und den Lichtpunkt geh (welche zu den Sehstrahlen und Lichtstrahlen parallel ist Um z. B. diè Beleuchtung des Dreieckes ABC für de Aufriß zu untersuchen (Fig. 34). legt man die Ebene, welch



a b c. d.

Fig. 34.

durch den Sehstrahl v und den Lichtstrahl l des Eckpunktes B bestimmt ist. Diese Hilfsebene schneidet die Dreiecksebene i einer Geraden e, deren Aufriß e'' mit l'' zusammenfällt und dere Grundriß e' sich durch den Schnittpunkt E mit der Seite AC ergibt. Bei Fig. 34a und 34c liegen l' und v' auf derselben Seit von e', daher ist im Aufrisse die beleuchtete Seite des Dreieckes ABC sichtbar. In Fig. 34b und 34d liegen aber l' und v' au verschiedenen Seiten der Geraden e'; es ist also im Aufriss die unbeleuchtete Seite des Dreieckes ABC sichtbar.

Je nachdem die Ebene im Nebenwinkel oder im Winkel der einfallenden Strahlen l und v verläuft ist im Aufrisse die beleuchtete oder unbeleuchtete Seite der Ebene sichtbar.

Es ist dann nicht notwendig, den Grundriß neuerdings zu untersuchen; denn bei positiver Charakteristik δ ist im Grundriß dieselbe Seite sichtbar (Fig. 34a und 34b), bei negativer Charakteristik aber die andere Seite (Fig. 34c und 34d). In Fig. 34 sind die vier möglichen Fälle für Übersicht dargestellt. Eine Ebene kann nämlich in bezug auf das Dreikant, welches von dem Lichtstrahl l und den beiden Sehstrahlen o und v gebildet wird, die nach einem Punkte der Ebene gerichtet sind, vier verschiedene Lagen annehmen. Wenn die Ebene eine positive Charakteristik hat, so schneidet sie die Verbindungsebene $[ov]$, welche zur Kreuzrißebene parallel ist, in einer nach rückwärts ansteigenden Geraden d. Dabei schneidet die Ebene entweder ins Dreikant gar nicht ein; dann ist in beiden Projektionen die beleuchtete Seite sichtbar. Oder die Ebene schneidet vom Dreikante den Lichtstrahl ab; dann ist in beiden Projektionen die unbeleuchtete Seite sichtbar. Wenn die Ebene eine negative Charakteristik hat, so schneidet sie die Verbindungsebene $[ov]$ in einer nach vorn ansteigenden Geraden d. Dabei schneidet die Ebene entweder den Sehstrahl o oder den Sehstrahl v vom Dreikante ab. Im ersten Falle ist im Grundrisse die unbeleuchtete und im Aufrisse die beleuchtete Seite sichtbar, im andern Falle ist es umgekehrt.

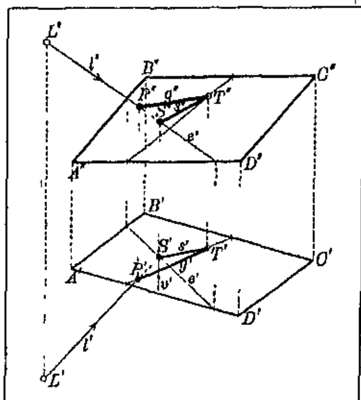


Fig. 35.

Zur Übung: Es ist das Analoge für Untersicht auszuführen, wobei die Lichtstrahlen entweder von oben oder von unten kommen sollen.

3. Schlagschatten eines Punktes und einer Geraden.

Ein leuchtender Punkt L, ein undurchsichtiger Punkt P auf einer undurchsichtigen Geraden g und ein weißer Schirm von der Form [illegible] Parallelogrammes $ABCD$ seien im Grund- und Aufrisse gegeben (Fig. 35)

Der Schnittpunkt S der Verbindungsgeraden des leuchtenden Punktes L und des undurchsichtigen Punktes P mit de gegebenen Ebene heißt der Schlagschatten des Punktes auf die Ebene.

Die Schnittgerade s der Verbindungsebene des leuchtende Punktes L und der undurchsichtigen Geraden g mit der Eben heißt der Schlagschatten der Geraden g auf die Ebene

Der Schlagschatten ist in physikalischer Hinsicht ein dunkle Stelle auf einer beleuchteten Fläche, dadurc hervorgebracht, daß an dieser Stelle das von einem undurch sichtigen Körper zurückgehaltene Licht nicht auffällt. Es is daher für die geometrisch wohl stets vorhandenen Schatten elemente zu beachten:

1. Nur auf der **beleuchteten Seite** einer Fläch kann **eigentlicher** Schlagschatten auftreten.

2. Nur wenn der undurchsichtige Punkt P **zwische** dem Lichtpunkte L und dem Schattenpunkte S liegt entsteht **eigentlicher** Schlagschatten.

Der eigentliche Schlagschatten einer Gerade beginnt beim Schnittpunkte T der Geraden mit de Ebene und geht nur nach einer Seite hin. Er wir erhalten, indem man noch den Schlagschatten eines ander Punktes der Geraden auf die Ebene sucht. Eine Gerade welche zu einer Ebene parallel ist, ergibt eine zu ih parallele Gerade als Schlagschatten. Der Schlagschatten eine Sehstrahles fällt in die Projektion der Lichtstrahlen, welch den Sehstrahl treffen.

4. Schlagschatten zweier ebenen Figuren auf einander.

Ein Dreieck ABC und ein Parallelogramm $DEFG$ seie als undurchsichtige Figuren durch ihre Projektionen gegebe (Fig. 36).

Die Schnittgerade g der beiden Ebenen α und δ wird ge funden, indem man etwa die Schnittpunkte der Seiten AB un BC des Dreieckes mit der Ebene des Parallelogrammes sucht

Nun sei Diagonalbeleuchtung vorausgesetzt. Man such zunächst etwa den Schnittpunkt des Lichtstrahles, der durch A geht, mit der Ebene δ. Er ist der Schlagschatten A_s de Punktes A auf δ. Der Schlagschatten der Geraden AB ergib sich nun, indem man den Schnittpunkt von AB und g mit A verbindet. Auf dem Lichtstrahle des Punktes B liegt dann B_s

Dem Dreiecke $A''B''C''$ entspricht dann ein Dreieck $A_s''B_s''C_s''$. Hieraus folgt:

Die Orthogonalprojektion einer ebenen Figur und die Orthogonalprojektion des Schlagschattens (für Parallelbeleuchtung) dieser Figur auf eine andere Ebene sind perspektiv affin. Die Affinitätstrahlen

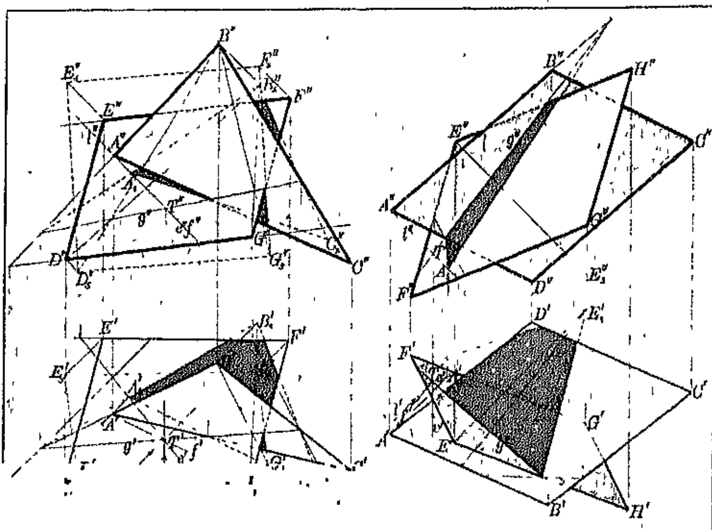


Fig. 36. Fig. 37.

sind die Projektionen der Lichtstrahlen (l''); die Affinitätsachse ist die Projektion der Schnittgeraden (g''). Für den Aufriß ist die Charakteristik der Affinität

$$\delta_s = \frac{A''T''}{A_s''T''}.$$

Da nun für das Parallelogramm $DEFG$ wieder Strahlen desselben Bündels mit den Ebenen α und δ zum Schnitte kommen, nur daß jetzt z. B. der Punkt E auf δ und sein Schatten E_s auf α liegt, so besteht zwischen den Parallelogrammen $D''E''F''G''$ und $D_s''E_s''F_s''G_s''$ dieselbe Verwandtschaft, nur daß die Charakteristik jetzt $1/\delta_s$ ist. Verbindet man daher D'' mit B_s'', sucht den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Affinitätsachse g'' und verbindet ihn mit B'',

so erhält man auf dem Affinitätstrahle von D'' den entsprechenden Punkt D_s''.

Es ist noch nach der vorigen Nummer zu ermitteln, wo eigentlicher Schlagschatten ist. Für den Aufriß der beiden Figuren denkt man sich die Ebene des Sehstrahles v und Lichtstrahles l des Punktes T der Schnittgeraden g. Sie schneidet die Ebenen δ und α in den Geraden e und f, deren Grundrisse e' und f' sind.

Wenn die Charakteristik δ_s für den Aufriß positiv ist, so liegen die Punkte A' und A_s' auf derselben Seite von v' und daher die Geraden e' und f' entweder beide im Nebenwinkel der einfallenden Strahlen l' und v' (Fig. 36) oder beide im Winkel der einfallenden Strahlen l' und v'; dann ist im Aufrisse von beiden Figuren die beleuchtete, bzw. unbeleuchtete Seite sichtbar. Wenn aber die Charakteristik δ_s negativ ist, so liegen die Punkte A' und A_s' auf verschiedenen Seiten von v', also eine der Geraden e', f' befindet sich im Nebenwinkel der einfallenden Strahlen l' und v', die andere im Winkel derselben (Fig. 37). Im Aufrisse ist dann von der einen Figur die beleuchtete Seite, von der andern Figur aber die unbeleuchtete Seite sichtbar.

5. Hellestufen.

Eine Ebene, welche eine rauhe (nicht glänzende), weiße (oder nur wenig gefärbte) Oberfläche hat, wirft das Licht nach allen Seiten gleichmäßig zurück. Bei Parallelbeleuchtung erscheint eine solche ebene Figur am hellsten, wenn die Lichtstrahlen zur Ebene normal sind. Mit zunehmendem Einfallswinkel nimmt die Helligkeit ab und wird Null, wenn die Lichtstrahlen zur Ebene parallel sind. Nennt man die größte Helligkeit r, so ist die Helligkeit bei einem Einfallswinkel ε

$$h = r \cdot \cos \varepsilon,$$

was seinen Grund darin hat, daß das Lichtstrahlbündel, welches bei schiefer Einfallsrichtung die Fläche f trifft, nur mehr einen Normalschnitt $f \cdot \cos \varepsilon$ besitzt.

Es sei z. B. eine auf der Aufrißebene liegende, zu l'' normale Gerade a als Achse eines Ebenenbüschels angenommen und die Ebenen seien wie die Blätter eines Buches begrenzt (Fig. 38). Die Einfallslote des Lichtstrahles für alle Ebenen des Büschels liegen dann auf jener Ebene, welche durch den Lichtstrahl l geht und zur Aufrißebene normal ist. Be-

trachtet man die Ebene als neue Projektionsebene und legt sie auf die Aufrißebene um, so bleibt der Schnittpunkt O von a und l unverändert. Durch einen zweiten Punkt P von l erhält man aus P'' die Umlegung $l^0 = O''P^0$ des Lichtstrahles. Für Diagonalbeleuchtung wählt man den Eckpunkt P eines Würfels, welcher O als gegenüberliegenden Eckpunkt und die Seitenbreite r als Kante besitzt. Zu jeder Ebene des Büschels gehört eine Spur e_0. Normal dazu ist das Einfallslot $O''E^0$, welches mit l^0 den Einfallswinkel ε bildet. Während die zu l normale Ebene die größte Helligkeit r besitzt, hat die Ebene mit der Spur e_0 die Helligkeit $h = r \cdot \cos \varepsilon$. Betrachtet man die Strecke $O''E^0 = r$ als Bild der größten Helligkeit und fällt man von E^0 die Normale zu l^0, so ist OC^0 das Maß der Helligkeit h. Zwischen den Grenzen 0 und r denkt man sich zehn Helligkeitstufen. Teilt man den auf l^0 liegenden Radius in 10 gleiche Teile, so kann man aus der Lage des Punktes C^0 wie von einem Maßstabe den Helligkeitsgrad der Ebene ε ablesen (in der Zeichnung $\frac{9}{10}r$). Die Aufrißebene selbst hat eine Helligkeit von nahezu $\frac{9}{10}r$. Von der Ebene φ mit der Spur f_0 ist die unbeleuchtete Seite sichtbar. Durch das von der Umgebung zurückgeworfene Licht werden auch die unbeleuchteten Flächen in gewissem Maße aufgehellt. Da es aber schwierig wäre, die Wirkung der Umgebung in jedem besonderen Falle zu beurteilen, macht man ein für allemal die einfache Annahme:

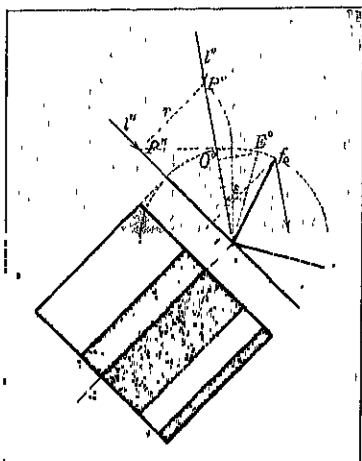


Fig. 38.

„Das Reflexlicht habe entgegengesetzte Richtung und halbe Stärke."

Man teilt daher den auf l^0 liegenden Radius von entgegengesetzter Richtung in fünf gleiche Teile. Die von F^0 zu l^0 gefällte Normale ergibt für die unbeleuchtete Seite der Ebene φ die Helligkeit $\frac{3}{10}r$. Auf der Ebene ε entsteht durch die Ebene φ

ein Schlagschatten. Der Schlagschatten erscheint noch dunkler als der Selbstschatten, und zwar auf einer Fläche, welche die größte Helligkeit aufweist, am dunkelsten, was wohl auf eine Kontrastwirkung zurückzuführen ist.

In der Zeichnung wird die verschiedene Helligkeit dadurch herbeigeführt, daß die einzelnen Flächenteile mit entsprechenden Tuschelagen überzogen werden. Es werden zunächst alle Teile mit der dem hellsten Teile entsprechenden Lage überzogen. Die dunkleren Teile werden (nach dem Trocknen) wiederholt mit derselben oder mit einer durch Tuschezusatz verstärkten*) Lösung überzogen.

6. Ebener Spiegel.

Ist die Ebene glatt, so tritt regelmäßige Reflexion (Spiegelung) ein. Jeder einfallende Lichtstrahl wird an der Ebene so reflektiert, daß der reflektierte Strahl mit dem einfallenden Strahle und dem Einfallslote auf derselben Ebene liegt und daß der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich ist.

Die von einem Punkte ausgehenden Strahlen scheinen von einem Punkte zurückzukommen, der auf der Normalen ebenso weit hinter dem Spiegel liegt, wie der Punkt vor demselben. „Gegenstand und Bild sind in bezug auf die Spiegelebene orthogonal symmetrisch."

Übungsaufgaben: 1. Das Spiegelbild eines Dreieckes in bezug auf eine Ebene ist zu suchen.

2. Es ist der Lichtstrahl zu suchen, welcher von einem Punkte L ausgeht und durch eine Ebene ε nach einem Punkte P reflektiert wird

3. Man soll jenen von L ausgehenden Lichtstrahl finden, welcher durch Reflexion an zwei Ebenen (etwa Grund- und Aufrißebene) nach einem gegebenen Punkte P kommt

4. Es ist zu zeigen, daß parallele Lichtstrahlen durch einen Spiegeloktanten als solche von entgegengesetzter Richtung zurückgeworfen werden.

§ 9. Eckige Körper (Polyeder).

1. Die konvexe Pyramide hat ein gewöhnliches Vieleck (ohne einspringende Winkel) als Basis und einen außerhalb der Ebene liegenden Punkt S als Spitze.

Bei einem undurchsichtigen Körper ist ein Teil der Kanten und Flächen sichtbar, ein anderer Teil unsichtbar.

---

*) Versuche haben nämlich gezeigt, daß bei mehrmaligem Gebrauche derselben Lösung der erzielte Unterschied kaum merklich ist.

Der Kantenzug, welcher den sichtbaren Teil vom unsichtbaren trennt, heißt der **wahre Umriß**, seine zugehörige Projektion der **scheinbare Umriß** des Körpers.

Für den Aufriß einer konvexen Pyramide ist die Spitze S der Deckpunkt eines Punktes E der Basisebene. Liegt S vor der Basisebene (§ 7, 1), so ist die Grundfläche im Aufrisse unsichtbar und alle Seitenflächen sind sichtbar, wenn E im Innern des Vieleckes sich befindet; dagegen sind die dem Punkte E zugekehrten Seitenflächen unsichtbar, wenn E außerhalb des Vieleckes liegt. Liegt S hinter der Basisebene, so gilt für die Sichtbarkeit das entgegengesetzte.

Im Grundrisse ist für die Sichtbarkeit der Basis nur nachzusehen, ob die Charakteristik der Ebene positiv oder negativ ist; bezüglich der Seitenflächen ist statt des Punktes E der Deckpunkt F der Spitze für den Grundriß maßgebend.

Bei Beleuchtung eines eckigen Körpers ist ein Teil der Flächen beleuchtet, ein anderer Teil unbeleuchtet. Der Kantenzug, welcher den beleuchteten Teil vom unbeleuchteten trennt, heißt die **Lichtgrenze** des Körpers.

Um die Lichtgrenze einer konvexen Pyramide für Parallelbeleuchtung zu finden, legt man den Lichtstrahl l, welcher durch die Spitze geht, sucht den Schlagschatten T der Spitze S auf der Basisebene und zieht die Tangenten aus T an die Basisfigur. Die Berührungspunkte geben jene Seitenkanten an, welche zur Lichtgrenze gehören; zwischen den Tangenten liegt der Schlagschatten der Pyramide auf der Basisebene.

Wenn der Lichtstrahl zuerst S und dann T trifft, so ist die Basis unbeleuchtet und alle Seitenflächen sind beleuchtet, wenn T im Innern der Basisfigur liegt; dagegen sind die dem Punkte T zugekehrten Seitenflächen unbeleuchtet, wenn T außerhalb des Vieleckes liegt. Trifft der Lichtstrahl zuerst T und dann S, so gilt für die Beleuchtung das entgegengesetzte.

2. Das konvexe Prisma hat zwei parallele, kongruente, gewöhnliche Vielecke als Grundflächen und Parallelogramme als Seitenflächen.

Von den beiden Grundflächen ist jene, welche vom Sehstrahl zuerst getroffen wird, sichtbar, die andere unsichtbar.

Um die Lichtgrenze eines konvexen Prismas zu finden, legt man durch einen Eckpunkt den Lichtstrahl und

sucht den Schlagschatten dieses Punktes auf der anderen Basisebene. Von den beiden Basisflächen ist dann jene beleuchtet, welche vom Lichtstrahle zuerst getroffen wird. Dann sucht man den Schlagschatten einer Seitenkante auf der Ebene der unbeleuchteten Basisfigur und zieht dazu die parallelen Tangenten an die Basisfigur. Die Berührungspunkte ergeben die Seitenkanten, welche zur Lichtgrenze gehören. Zwischen den Tangenten liegt der Schlagschatten des Prismas auf der Basisebene. Die dem Schlagschatten zugekehrten Seitenflächen sind unbeleuchtet.

Jeder andere eckige Körper kann auf diese zwei Grundkörper durch **Zerlegung** oder **Ergänzung** zurückgeführt werden.

Breitet man alle Flächen eines konvexen Polyeders in eine Ebene aus, so daß man dann umgekehrt durch Faltung wieder die Körperform herstellen kann, so erhält man das sogenannte Netz des Körpers.

3. Die regelmäßigen Polyeder Platons sind:

Tetraeder

Hexaeder	Oktaeder
Dodekaeder	Ikosaeder.[5]

Es soll z. B. das Dodekaeder mit Diagonalbeleuchtung abgebildet werden (Fig. 39).

Zunächst ist das regelmäßige Fünfeck $ABCDE$ aus der gegebenen Kante k des Dodekaeders konstruiert, nämlich das Dreieck ABC aus den Seiten $AB = BC = k$ und $AC = AD = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k^2}$. Hieraus kann der Mittelpunkt O' und der Radius r des umschriebenen Kreises gefunden werden. Das unsichtbare Basisfünfeck erscheint um π gedreht, so daß die Eckpunkte beider Fünfecke im Grundrisse ein regelmäßiges Zehneck mit der Seite s bilden.

Dreht man das Fünfeck $ABCDE$ um die Seite AB, bis der Grundriß des Eckpunktes D nach S' kommt, so erscheint die Diagonale AD als r. Dreht man das Fünfeck einerseits um AB und andererseits um AE, bis die beiden Figuren längs der nach abwärts gehenden Kante AH zusammenstoßen, so ergibt sich H' aus den beiden Spurnormalen von E und B. Die Projektion $A'H'$ muß den äußeren Winkel bei A' halbieren, fällt also in die Verlängerung von $A'S'$ und schließt

mit AB den Winkel $\frac{3}{10}\pi = 54^0$ ein, ebenso wie die Zehneckseite, deren Endpunkt L' auch auf der Spurnormalen $E'H'$ liegt. Daraus folgt, daß $A'H' = s$ ist. Aus gleichem Grunde ist $J'K' = s$. Die Diagonale $A'J'$ fällt in die Verlängerung

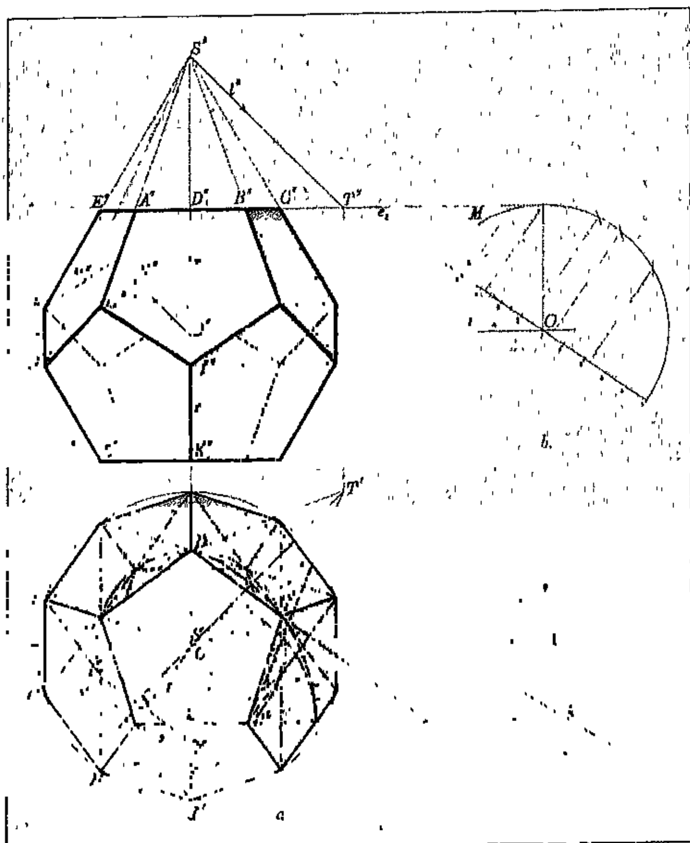


Fig. 39.

der Zehneckseite $A'L'$, und da $ASBJ$ ein Rhombus ist, muß $A'J' = r$ sein. Nun ist das Dreieck $A'L'S' \cong A'H'J'$ und daher $H'J' = r$.

„Der scheinbare Umriß des Dodekaeders ist ein regelmäßiges Zehneck mit der Seite r."

Aus $k^2 = r^2 \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ und $s^2 = r^2 \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ folgt $k^2 = r^2 + s^2$. Die Kanten FG und JK sind im Raume zueinander normal und zur Kreuzrißebene parallel. Sie erscheinen im Grundrisse als r, bzw. s. Aus der Nebenfigur (39c) ist zu ersehen, daß diese Kanten im Aufrisse als s, bzw. r erscheinen, woraus der Aufriß des ganzen Dodekaeders leicht konstruiert werden kann.

Erweitert man die durch die Seiten des Fünfeckes $ABCDE$ nach abwärts gehenden Flächen, so entsteht eine konvexe Pyramide mit der Spitze S. Für diese findet man (nach **1.**), daß die Flächen BCS und CDS unbeleuchtet, die drei anderen Seitenflächen beleuchtet sind. Daher sind auch die durch BC und CD nach abwärts gehenden Flächen des Dodekaeders unbeleuchtet, die durch DE, EA, AB gehenden beleuchtet. Da von zwei parallelen Flächen eines konvexen Polyeders immer die eine beleuchtet und die andere unbeleuchtet ist, braucht man die unteren fünf Flächen nicht von neuem zu untersuchen.

Um auch den Helligkeitsgrad für die einzelnen Flächen zu ermitteln, kann man durch den Mittelpunkt O den Lichtstrahl legen, ferner die 6 Normalen zu den Flächen. Eine solche Normale trifft die Fläche im Mittelpunkte M des Fünfeckes. Legt man die Horizontalebene durch M, so wird sie vom Lichtstrahle in einem Punkte N geschnitten. Der Winkel MON ist dann der Einfallswinkel der Lichtstrahlen gegen die Fläche, welche M als Mittelpunkt besitzt. Zeichnet man einen Kreis (Fig. 39b) mit dem Radius $OM = r + s/_2$, sucht die wahre Größe der Strecke ON und macht dann die den einzelnen Flächen entsprechende Strecke $N'M' = NM$, so ist MON die wahre Größe des Einfallswinkels. Teilt man den in die Richtung von ON fallenden Durchmesser von O aus nach links in 10 und nach rechts in 5 gleiche Teile und fällt man von den einzelnen Punkten M die Normalen zum Durchmesser, so erhält man die Helligkeitsgrade. Z. B. für die Fläche $AEFGH$ findet man ungefähr $0{,}9 \cdot r$, für die horizontale Fläche nahezu $0{,}6 \cdot r$. In die dunkelste Zone 01 der unbeleuchteten Seite gehören zwei Flächen, nämlich jene, welche von BC nach abwärts geht, und jene, welche von JK nach rechts geht. Es ist auch zu bemerken, daß die durch CD gehende Fläche infolge des Reflexlichtes eigentlich etwas heller erscheint als die beleuchtete Fläche, welche durch DE geht.[10]

Übungsaufgaben: 1. Ein gegebenes Viereck $A'B'C'D'$ soll der Grundriß eines Tetraeders sein, bei welchem die Fläche ABC gleichseitig und die Fläche BCD gleichschenkelig ist mit B, C oder D als Spitze.

2 Es ist ein regelmäßiges Tetraeder abzubilden, von welchem der Grundriß einer Dreiecksfläche und der Aufriß eines Eckpunktes dieser Fläche gegeben sind.

3. Es ist ein auf der Grundebene aufgestelltes, normales Parallelepiped nach einem Quadrate zu schneiden.

4. Es ist ein Ikosaeder so abzubilden, daß die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Eckpunkte zur Grundebene normal ist. Man soll die Diagonalbeleuchtung ausführen.

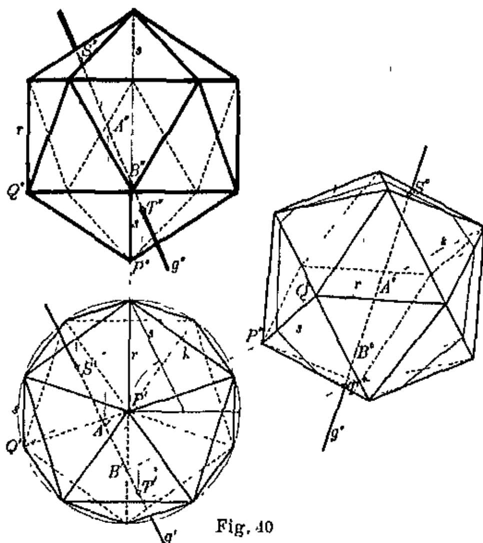


Fig. 40

4. Für manche Aufgaben ist die **Einführung einer neuen, nicht parallelen Aufrißebene** (oder Grundebene) vorteilhaft. Ist für einen Punkt P durch seinen Grundriß P' gehend der neue Ordner und auf diesem die neue Projektion P^0 gewählt (Fig. 40), so findet man für einen anderen Punkt Q die neue Projektion Q^0, indem man durch Q' die Parallele zum erstgewählten Ordner $P'P^0$ zieht und auf dieser den Punkt Q^0 so ermittelt, wie es dem Höhenunterschiede s des Punktes Q über oder unter P entspricht.

Sollen z. B. für das in der letzten Aufgabe (4.) erwähnte **Ikosaeder die Schnittpunkte mit einer Geraden** g gefunden werden, so wählt man eine Ebene, welche durch g geht

und zur Grundebene senkrecht ist, als neue Projektionsebene (Fig. 40). Sie schneidet das Ikosaeder in einer Figur, welche in der neuen Projektion in wahrer Form und Größe erscheint.

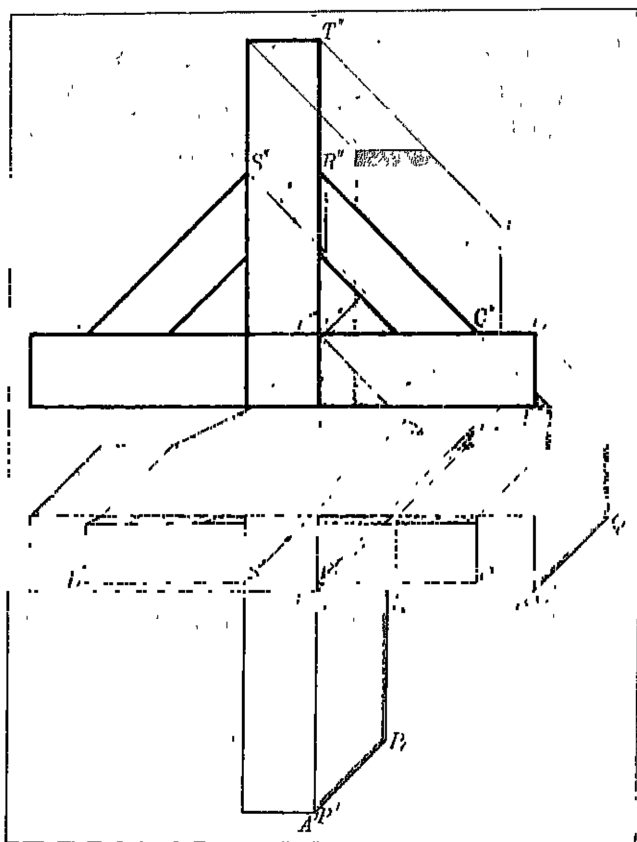


Fig. 41.

Die neue Projektion g^0 der Geraden ergibt sich aus zwei passend gewählten Punkten A, B. Sie trifft die Schnittfigur in S^0 und T^0, woraus man den Grundriß und den Aufriß der Schnittpunkte S, T finden kann.

Soll die Schnittfigur des Ikosaeders mit einer Ebene gefunden werden, welche etwa durch zwei Horizontale h_I und h_{II} gegeben ist, so wählt man eine Ebene, welche zu h senkrecht ist, als neue Projektionsebene. Auf dieser erscheint die Ebene bloß als Gerade, weshalb sich die neuen Projektionen der Schnittpunkte der Ebene mit den einzelnen Kanten unmittelbar ergeben.

5. In Fig. 41 ist eine sogenannte Holzverbindung mit Diagonalbeleuchtung abgebildet. Die einzelnen Balken haben als Normalschnitte Quadrate mit den Seiten 25 cm, bzw. 20 cm, wobei für die Zeichnung eine Verkleinerung von $^1/_{25}$ vorausgesetzt ist. Die ersteren sind schon aufrechte, vierseitige, konvexe Prismen; die letzteren können durch Erweiterung nach oben zu schiefen, vierseitigen, konvexen Prismen ergänzt werden. Um die Beleuchtungsverhältnisse des nach vorne gehenden Balkens zu finden, sucht man den Schlagschatten der Seitenkante AP auf die Basisebene, nämlich AP_1. Die parallelen Tangenten an das Basisrechteck ergeben die zwei Seitenkanten, welche zur Lichtgrenze gehören. Von den unbeleuchteten Flächen ist keine sichtbar. Der Schlagschatten der Basiskante PE auf die Grundebene ist eine gleiche und parallele Strecke (§ 8, 3). Dieser Schlagschatten geht aber bei F auf die vordere beleuchtete Fläche des zweiten horizontalen Balkens über und geht nach E. Für diesen zweiten Balken ist die Seitenkante BQ benützt. Für das schiefe Prisma ergibt die Seitenkante CR auf der Ebene des Basisrechteckes den Schlagschatten CR_s, welcher hier in die Seite des Rechteckes fällt. Daher sind die schief ansteigenden Flächen im Streiflichte. Für das zweite schiefe Prisma ergibt die Seitenkante DS den Schlagschatten DS_s, zu welchem man die parallelen Tangenten an das Basisrechteck zu ziehen hat. Die Kante ET des aufrecht stehenden Balkens wirft noch einen Schlagschatten auf die vordere beleuchtete Fläche des schiefen Balkens; er ergibt sich aus dem Schnittpunkte der Spur der Lichtstrahlebene und der Geraden $C'R'$.

In Fig. 42 ist ein Viertel einer Doppelankerplatte (im Maße 1 : 5 verkleinert) mit Diagonalbeleuchtung abgebildet, und zwar der Aufriß, Kreuzriß (nur bis zum Schnitte s) und Übersichtgrundriß mit Diagonalbeleuchtung von oben, ferner ein Untersichtgrundriß mit Diagonalbeleuchtung von unten. Der Schlagschatten P_s des Punktes P fällt

gerade auf die Kante der unter $\pi/_4$ ansteigenden Ebene. Der Schlagschatten der Kante RS z. B. geht von S nach R_s (Pioro[3]).

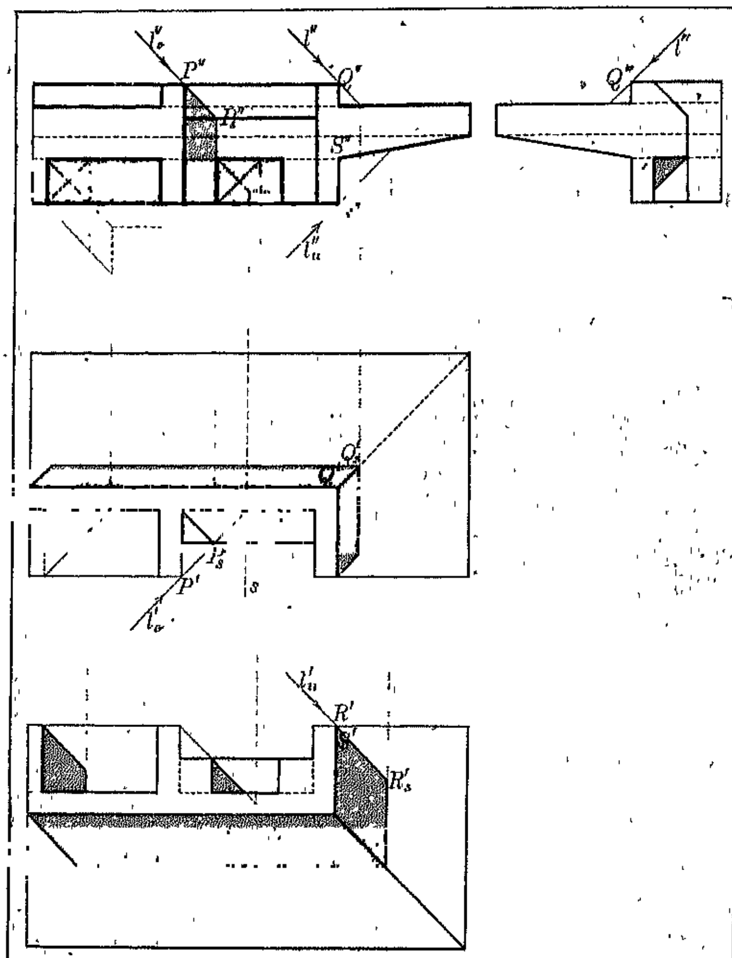


Fig. 42.

Um die Anschaulichkeit des Bildes noch zu erhöhen, werden stofflich verschiedene Körper oder

Bestandteile durch bestimmte Farben*) gekennzeichnet. Nachdem nämlich die Beleuchtungsverhältnisse durch Tuschelagen nachgeahmt sind, wird noch das Bild des ganzen Körpers oder des betreffenden Bestandteiles mit einer schwachen Lage der dem Material entsprechenden Farbe überzogen (ein Schnitt mit einer etwas stärkeren Lage).

---

*) Es wird gewöhnlich angedeutet:

Holz	durch	Gummigutti mit gebr. Sienna,
Gußeisen	„	graue Neutraltinte mit wenig Berlinerblau,
Schmiedeeisen	„	Berlinerblau mit wenig Neutraltinte,
Stahl	„	Violett (Berlinerblau mit wenig Karmin),
Bronze	„	Gummigutti,
Stein	„	graue Neutraltinte mit gebr. Sienna,
Ziegel	„	Karmin mit Gummigutti,
Damm	„	Zinnobergrün,
Einschnitt	„	gebr. Sienna,
Plateau	„	Gummigutti.

II. Abschnitt.

Kugel, Zylinder, Kegel.

Umriß. Schnitt mit einer Geraden und einer Ebene. Beleuchtung.

§ 10. Polarität und Antipolarität für Kreis und Kugel.

1. In bezug auf einen Kreis $[O, k]$ entspricht jedem Punkte P eine Gerade p, so daß

1. $OP \perp p$,
2. $OP \times Op = k^2$ ist.

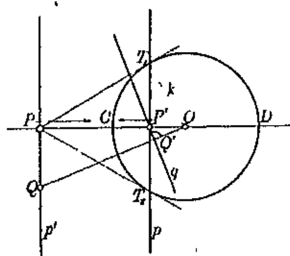


Fig. 43a.

Dann heißt
P der **Pol** von p und
p die **Polare** von P.

Für einen äußeren Punkt P ergibt sich die Polare p als Verbindungsgerade der Berührungspunkte T_I, T_{II} der Tangenten aus P an den Kreis.

In bezug auf einen Kreis $[O, k]$ entspricht jedem Punkte P_n eine Gerade p_n, so daß

1. $OP_n \perp p_n$,
2. $OP_n \times Op_n = -k^2$ ist.

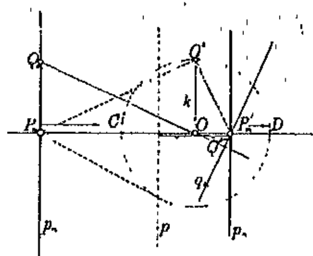


Fig. 43b.

Dann heißt
P_n der **Antipol** von p_n und
p_n die **Antipolare** von P_n.

Für jeden Punkt P_n ergibt sich die Antipolare p_n, indem man den zu OP_n normalen Halbmesser $OO^0 = k$ zieht, in O^0 die Normale zu O^0P_n errichtet; dann ist p_n im

Für den inneren Punkt P' ist die Polare p' die Normale in P zu OP.

Schnittpunkte P_n' normal zur Geraden OP_n. Die Antipolare p_n liegt auch symmetrisch zur Polaren p in bezug auf den Mittelpunkt O.

Die Polare eines uneigentlichen Punktes U ist der zu OU normale Durchmesser. Die Polare des Mittelpunktes O ist die uneigentliche Gerade u. Rückt der Punkt P auf den Kreis, so werden die Punkte T_I und T_{II} benachbarte Punkte und die Polare wird zur Tangente. Die Polare eines Punktes T des Kreises ist die Tangente t für diesen Punkt; der Pol einer Tangente t ist ihr Berührungspunkt T.

Die Antipolare eines uneigentlichen Punktes U ist der zu OU normale Durchmesser. Die Antipolare des Mittelpunktes O ist die uneigentliche Gerade u.

Die Antipolare*) eines Punktes C des Kreises ist die Tangente des diametral liegenden Punktes D.

Bewegt sich der Punkt $P(P_n)$ auf der Geraden $p'(p_n')$ nach $Q(Q_n)$ und fällt man von $P'(P_n')$ die Normale $q(q_n)$ auf $OQ(OQ_n)$, wodurch sich der Schnittpunkt $Q'(Q_n')$ ergibt, so ist

$$OPQ \sim OQ'P'$$
$$OP : OQ = OQ' : OP'$$
$$OP \times OP' = OQ \times OQ'$$
$$OQ \times Oq = k^2,$$

d. h. die Polare von Q ist q und geht also durch P'.

$$OP_nQ_n \sim OQ_n'P_n'$$
$$OP_n : OQ_n = OQ_n' : OP_n'$$
$$OP_n \times OP_n' = OQ_n \times OQ_n'$$
$$OQ_n \times Oq_n = -k^2,$$

d. h. die Antipolare von Q_n ist q_n.

Wenn ein Punkt $P(P_n)$ eine Gerade beschreibt, so dreht sich seine Polare p (Antipolare p_n) um den Pol (Antipol) der Geraden und umgekehrt.

Anders ausgesprochen:

Der Pol (Antipol) der Verbindungsgerade zweier Punkte ist der Schnittpunkt der Polaren (Antipolaren) dieser Punkte (Bresse[11]).

*) Die Antipolarität in bezug auf den Kreis [O, k] ist eigentlich die Polarität in bezug auf einen Kreis mit dem Mittelpunkte O und einem imaginären Halbmesser $k \cdot i$.

Punkte, von welchen jeder auf der Polaren des anderen liegt, heißen **konjugierte Punkte.**

Gerade, von welchen jede durch den Pol der anderen geht, heißen **konjugierte Gerade.**

Konjugierte Durchmesser des Kreises sind zueinander normal.

2. Sind zwei Strecken AC und AD gegeben und sucht man den Halbierungspunkt O der Strecke CD, so heißt die Strecke

$$AO = \frac{AC + AD}{2}$$

das **arithmetische Mittel** für AC und AD.

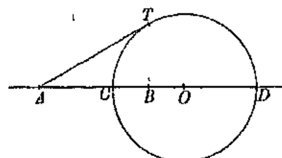


Fig. 43 c.

Zeichnet man über CD als Durchmesser einen Kreis und zieht man aus A die Berührungstrecke AT, so ist

$$AT = \sqrt{AC \times AD}$$

das **geometrische Mittel** für AC und AD.

Die Normale von T auf CD oder die Polare des Punktes A in bezug auf den Kreis schneidet CD im Punkte B.

Nun ist $$\overline{AB} \times \overline{AO} = \overline{AT}^2.$$

Durch Einsetzen der obigen Ausdrücke wird

$$AB = \frac{AC \times AD}{\frac{AC + AD}{2}}$$

und

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right].$$

Die Strecke AB heißt das **harmonische Mittel** für AC und AD. Der Punkt B heißt der **vierte harmonische Punkt** zu A in bezug auf C und D.

Es ist immer $$AB < AT < AO.$$

Besondere Fälle: Der Halbierungspunkt O einer Strecke CD ist der vierte harmonische Punkt zum uneigentlichen Punkte U der Geraden in bezug auf die beiden Endpunkte C, D. Rückt A nach C, so kommt auch der vierte harmonische Punkt B nach C.

Werden die vier harmonischen Punkte orthogonal auf eine Ebene projiziert, so ergeben sich wieder vier harmonische Punkte, da jede der drei Strecken AB, AC, AD mit demselben Faktor multipliziert wird, wobei der obige Ausdruck ungeändert bleibt.

3. Dreht man die Fig. 43a um die Gerade OP und zwar um den Winkel π, so entsteht aus dem Kreise eine Kugel $[O, k]$, aus den Tangenten PT_I und PT_{II} der Berührungskegel des Punktes P (für einen uneigentlichen Punkt P_∞ der Berührungszylinder) an die Kugel, aus den Berührungspunkten T_I und T_{II} der zugehörige Berührungskreis und aus der Polaren p die zu OP normale Ebene π dieses Berührungskreises. Man nennt P den Pol der Ebene π und π die Polarebene des Punktes P in bezug auf die Kugel $[O, k]$. Die Polarebene π' des inneren Punktes P' geht durch p' und ist normal zu OP'.

Die Polarebene eines uneigentlichen Punktes ist die zu OP senkrechte Diametralebene. Die Polarebene des Mittelpunktes ist die uneigentliche Ebene. Rückt der Punkt P auf die Kugel selbst (nach $C = T$), so wird die Polare p zur Tangente t für T. Durch Drehung dieser Tangente entsteht eine Ebene, welche also die Tangenten aller durch T gehenden Schnitte der Kugel enthält.

Auch bei einer beliebigen Fläche liegen die Tangenten an alle durch einen Flächenpunkt T gehenden Linien der Fläche im allgemeinen auf einer Ebene. Diese Ebene heißt die **Tangentialebene τ der Fläche** und T heißt ihr **Berührungspunkt.** Die Gerade, welche im Berührungspunkte T zur zugehörigen Tangentialebene τ normal ist, heißt die **Flächennormale** für T.

Die Polarebene eines Punktes der Kugel ist die Tangentialebene; der Pol einer Tangentialebene ist ihr Berührungspunkt.

Wenn der Punkt P die Gerade p' beschreibt, so dreht sich die Polarebene um die in P' zur Zeichenebene normale Gerade r. Solche Gerade wie p' und r heißen Polargerade.

Es ist hier

$$\begin{matrix} OP \perp \pi & & p' \perp r \\ OP \times O\pi = k^2 & \text{und} & Op' \times Or = k^2. \end{matrix}$$

Von der Fig. 43b kommt man in gleicher Weise zur Antipolarität in bozug auf die Kugel $[O, k]$.

Legt man durch P eine Ebene, welche die Spur e_0 hat (Fig. 44) und zur Zeichenebene senkrecht ist, so schneidet sie

die Kugel in einem Kreise mit dem Durchmesser $C^0 D^0$, den Kegel in zwei Erzeugenden PT^0 und die Polarebene π in einer Geraden p_0, welche in P^0 zu e_0 senkrecht ist. Die Umlegung dieses Schnittes ist in der Figur gezeichnet. Da nun P^0 der vierte harmonische Punkt zu P in bezug auf C^0 und D^0 ist, so ergibt sich: „Auf allen Strahlen durch einen Punkt P liegen die vierten harmonischen Punkte zu P in bezug auf die Schnittpunkte C^0 und D^0 des Kreises auf der Polaren p."

Durch Drehung der Figur läßt sich der Satz wieder auf die Kugel übertragen.

„Auf allen Strahlen durch einen Punkt P liegen die vierten harmonischen Punkte zu P in bezug auf die Schnittpunkte C^0 und D^0 mit der Kugel auf der Polarebene π."

Fig. 44.

Für den besonderen Fall, daß P ein uneigentlicher Punkt ist, ergibt sich:

„Zieht man zu einem Durchmesser eines Kreises (einer Kugel) parallele Sehnen, so liegen die Halbierungspunkte dieser Sehnen auf dem konjugierten Durchmesser (auf der konjugierten Diametralebene)."

§ 11. Umriß; Flächenpunkt, Tangentialebene, Flächennormale; Beziehung zu einer Geraden.

1. Die Berührungslinie des von den berührenden Sehstrahlen gebildeten Kegels oder Zylinders heißt der **wahre Umriß** der Fläche. Für eine konvexe Fläche ist er die Grenze des sichtbaren und unsichtbaren Teiles der Fläche.

Die Schnittlinie dieses Kegels oder Zylinders mit der Projektionsebene heißt der **scheinbare Umriß.** Dieser ist also auch die Projektion des wahren Umrisses.

Der wahre Umriß einer Kugel ist der Berührungskreis des von den berührenden Sehstrahlen gebildeten Drehkegels. Er liegt auf der Polarebene des Sehpunktes in bezug auf die Kugel.

Für Parallelprojektion ist der wahre Umriß einer Kugel der Berührungskreis des von den berührenden Sehstrahlen gebildeten Drehzylinders, also ein Großkreis der Kugel, welcher auf der Polarebene des uneigentlichen Seh-

punktes, also auf der zu den Sehstrahlen normalen Diametralebene der Kugel liegt.

Für Orthogonalprojektion wird diese Ebene zur Projektionsebene parallel. Der Schnitt des Sehstrahlenzylinders mit der Projektionsebene ist daher ein kongruenter Kreis.

Für Orthogonalprojektion ist der scheinbare Umriß einer Kugel ein Kreis mit der Projektion des Kugelmittelpunktes als Mittelpunkt und dem Halbmesser der Kugel als Radius.

Ist nun eine Kugel durch ihren Mittelpunkt $O(O', O'')$ und ihren Radius r gegeben (Fig. 45), so können die Umrisse für Grund- und Aufriß sofort gezeichnet werden. Der Aufriß des horizontalen Umrißkreises fällt in die Horizontale y'' durch O'' und der Grundriß des vertikalen Umrißkreises liegt auf der Horizontalen y' durch O'. Man kann sich die Grund- und Aufrißebene zunächst durch den Mittelpunkt O gehend denken. Da würden die beiden Umrißkreise sich decken. Bei Verschiebung des Grundrisses um die Strecke $O'O''$ nimmt dann die y-Achse die zwei Lagen y' und y'' an.

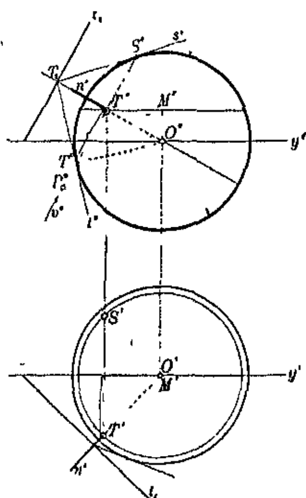


Fig. 45.

2. Für jede Fläche ist zunächst die Aufgabe der Inzidenz von Punkt und Fläche zu lösen. Es soll also auf die Kugel ein Punkt T gelegt werden*).

---

*) Für jeden Punkt $T(x, y, z)$ der Kugel, bezogen auf das durch den Mittelpunkt O gehende Achsensystem, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

womit man die Gleichung der Kugel gefunden hat. Dividiert man die Gleichung durch r^2 und beachtet, daß $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ die Kosinus der Winkel α, β, γ sind, welche der Radius des Punktes T mit den Achsen bildet, so findet man, daß

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1.$$

Da kann eine Projektion z. B. T'' gewählt werden; man soll die andere Projektion, den Grundriß, finden. Durch T'' ist der zur Aufrißebene normale Sehstrahl v bestimmt. Dieser schneidet die Kugel in den zwei möglichen Punkten S und T. Es liegt also eine Aufgabe 2. Grades vor, welche mit Lineal und Zirkel gelöst werden kann. Man legt (Fig. 45) durch den Sehstrahl v die Ebene, welche zur Grundebene parallel ist. Sie schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen Aufriß die durch T'' gehende, horizontale Sehne des Umrißkreises ist. Sein Grundriß hat die halbe Sehne als Radius und O' als Mittelpunkt. Er schneidet den Ordner des Punktes T'' in den Grundrissen S', T'. Man kann auch durch v die Ebene legen, welche durch den Mittelpunkt O geht. Sie schneidet die Kugel in einem Großkreise. Legt man die Ebene auf die Ebene des vertikalen Umrißkreises um, so kommt der Großkreis mit dem Umrißkreise zur Deckung. Der umgelegte Sehstrahl v^0 ergibt die Umlegungen S^0, T^0 der beiden Schnittpunkte. Damit ist die Strecke gefunden, um welche die Punkte S, T hinter, bzw. vor der Ebene des vertikalen Umrißkreises liegen. Durch Übertragen dieser Strecke auf den Ordner des Punktes T'' von y' aus erhält man die Grundrisse S', T'.

Wenn T'' den scheinbaren Umriß einer Fläche (in einem gewöhnlichen Punkte) überschreitet, werden die Schnittpunkte des zugehörigen Sehstrahles mit der Fläche paarweise imaginär.

3. Für einen Punkt T der Kugel ist die Tangentialebene τ zu konstruieren.

Die Tangentialebene der Kugel ist zum Radius des Berührungspunktes senkrecht.

Legt man in S^0 und T^0 die Tangenten s^0, t^0 an den umgelegten Großkreis (Fig. 45), so ist ihr Schnittpunkt T_2 die Spur der Tangenten s, t auf der Ebene des Umrißkreises. Zieht man nun durch T_2 die Normale zu $O''T''$, so erhält man die Spur t_2 der Tangentialebene τ für den Punkt T (und der Tangentialebene σ für den Punkt S) der Kugel auf der Ebene des Umrißkreises. In gleicher Weise ergibt sich die Spur t_1. Da muß der Schnittpunkt von t_1 mit der Horizontalen y' und der Schnittpunkt von t_2 mit der Horizontalen y'' auf einem Ordner liegen. Aus dieser Konstruktion ersieht man:

Die Spur einer Tangentialebene einer Kugel auf der Ebene des Umrißkreises ist die Polare der Projektion des Berührungspunktes.

Wenn ein Punkt P den Sehstrahl v beschreibt, so dreht sich die Polarebene um die Gerade t_2. Diese Polarebenen haben also auch t_2 als Spur auf der Ebene des Umrißkreises. (Die Spur t_2 ist die Polargerade des Sehstrahles v.)

Die Spur der Polarebene eines Punktes in bezug auf die Kugel auf der Ebene des Umrißkreises ist die Polare der Projektion des Punktes.

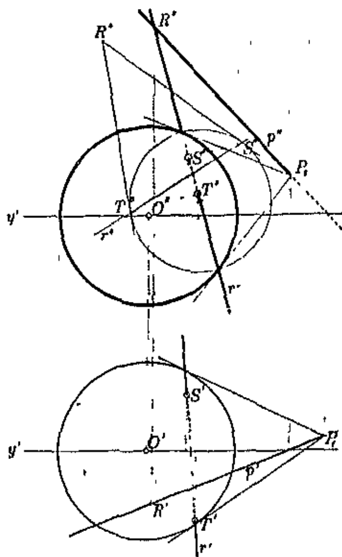


Fig. 46.

Der zum Berührungspunkte T gehörige Radius ist die Flächennormale der Kugel. Der nach außen gehende Teil derselben ist hier, wie der Punkt T selbst, im Grund- und Aufrisse sichtbar.

4. Beziehung der Kugel zu einer Geraden.

α) Es sind die Schnittpunkte einer Geraden r mit der Kugel zu suchen.

Man legt durch die Gerade r eine Ebene, z. B. eine solche, welche zur Aufrißebene normal ist. Sie schneidet die Kugel in einem Kreise, welcher im Aufrisse als Sehne des Umrißkreises erscheint. Durch Umlegung der Geraden und dieses Schnittkreises auf die Ebene des Umrißkreises (Fig. 46) erhält man die Umlegungen S^0 und T^0 der beiden Schnittpunkte, woraus man ihren Aufriß und Grundriß finden kann.

β) Es ist zu einer Geraden p die Polargerade r zu finden.

Man sucht die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Geraden p mit den Ebenen der beiden Umrißkreise. Die Polare von P_1 in bezug auf den ersten Umrißkreis ist die Spur der zur Grundebene normalen Polarebene des Punktes P_1 in bezug auf die Kugel. Diese projizierende Polarebene muß die Polargerade r

enthalten; daher ist jene Polare schon der Grundriß r' der Polargeraden r von p. Ebenso ist die Polare von P_2 in bezug auf den zweiten Umrißkreis der Aufriß r'' der Polargeraden r von p. Man legt nun durch r die Hilfsebene, welche zur Aufrißebene normal ist. Sie schneidet die Gerade p in einem Punkte R und die Kugel in einem Kreise. Die Ebene legt man auf die Ebene des Umrißkreises um und zieht dann aus dem Punkte R^0 die Tangenten an den Schnittkreis. Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte S^0, T^0 ist die Umlegung r^0 der Polargeraden r. Die Punkte S, T, für welche man sofort die Projektionen S'', T'' und S', T' finden kann, sind die Schnittpunkte der Polargeraden r mit der Kugel*). Die Punkte S und T liegen auf der obern Hälfte der Kugel, daher ist die Gerade r im Grundrisse gleich bei der Ein- und Austrittstelle sichtbar. Der Punkt S liegt auf der rückwärtigen, T auf der vorderen Hälfte der Kugel; daher wird die Gerade r im Aufrisse nicht bei S, sondern erst beim Umrisse sichtbar.

γ) Es sind die Berührungsebenen aus einer Geraden p an die Kugel zu legen.

Die eben gefundenen Punkte S, T sind schon die Berührungspunkte der zwei durch p gehenden Berührungsebenen. Die Spuren auf der Ebene des ersten Umrißkreises sind die von P_1 zu $O'S'$ und $O'T'$ gefällten Normalen; die Spuren auf der Ebene des zweiten Umrißkreises sind die durch P_2 gehenden Normalen zu $O''S''$ und $O''T''$.

Eine Gerade mit reellen Schnittpunkten gibt imaginäre Berührungsebenen und eine solche mit imaginären Schnittpunkten reelle Berührungsebenen.

5. Durch Bewegung einer Geraden längs einer Linie so, daß sie stets parallel bleibt, entsteht eine Zylinderfläche. Die einzelnen Lagen der Geraden heißen Erzeugende.

Ist die Linie ein Kreis, so heißt die Fläche „Kreiszylin-

Durch Bewegung einer Ge- [illegible]

[illegible]

*) [illegible] so erhäl [illegible]

der" und zwar **normaler** (aufrechter) oder **schiefer Kreiszylinder**, je nachdem die Erzeugenden zur Kreisebene normal sind oder schief.

und zwar **normaler** (aufrechter) oder **schiefer Kreiskegel**, je nachdem die Verbindungsgerade des Kreismittelpunktes mit der Spitze zur Kreisebene normal ist oder schief.

Der normale Kreiszylinder und der normale Kreiskegel entstehen auch durch Drehung einer Geraden, welche zur Drehachse z parallel ist, bzw. sie unter einem Spitzwinkel β schneidet, weshalb sie auch **Drehzylinder** und **Drehkegel** heißen. Jeder Punkt der Geraden beschreibt dabei einen **Parallelkreis**.

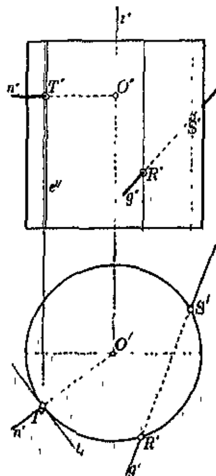


Fig. 47.

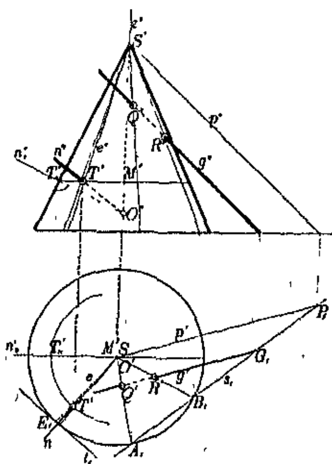


Fig. 48.

Ein **Drehzylinder** und ein **Drehkegel**, für welche die Drehachse z zur Grundebene normal ist, sind in Fig. 47 und 48 abgebildet.

Zwei benachbarte Erzeugende e bestimmen eine **Tangentialebene**, welche die **Flächen in allen Punkten von e berührt.** Die berührenden Sehstrahlen liegen auf zwei Tangentialebenen, welche zur Aufrißebene normal sind. Ihre **Berührungserzeugenden** bilden den **wahren Umriß** der Flächen, die Projektionen dieser Erzeugenden den **scheinbaren Umriß**.

Hat man für einen Flächenpunkt T wieder den Aufriß T'' gewählt, so muß der Grundriß T' beim Zylinder auf dem Grundkreise liegen; er ergibt sich also schon durch einen Ordner.

Durch jeden Flächenpunkt T geht eine Erzeugende und ein Parallelkreis. Für den Kegel kann man daher T' finden, indem man entweder durch T'' den Aufriß e'' der Erzeugenden zieht und aus E_1 den Grundriß e' findet, auf welchem T' liegen muß. Andererseits kann man durch T'' die Horizontale ziehen, welche den Aufriß des Parallelkreises vorstellt. Der Grundriß des Parallelkreises hat M' als Mittelpunkt und $M'' T_0''$ als Radius. Auf ihm ergeben sich durch den Ordner zwei mögliche Punkte T'.

Die Tangentialebene τ für den Punkt T hat beim Zylinder die Tangente t_1 bei T' an den Grundkreis und beim Kegel die Tangente t_1 bei E_1 an den Grundkreis als Spur. Die Flächennormale n kann für den Zylinder als Radius TO unmittelbar in der Abbildung gezeichnet werden. Beim Kegel kann die Flächennormale für den Punkt T_0 der Umrißerzeugenden unmittelbar gezeichnet werden. Sie schneidet die Drehachse in einem Punkte O, durch welchen auch die Flächennormale des Punktes T gehen muß.

Eine Gerade ergibt zwei Schnittpunkte. Um diese zu finden, legt man durch die Gerade g eine Ebene, welche für den Zylinder zu den Erzeugenden parallel ist. Sie schneidet den Zylinder in zwei Erzeugenden, auf welchen sich die Punkte R und S befinden. Bei der Austrittstelle S ist die Gerade im Aufrisse noch unsichtbar. Beim Kegel legt man durch die Gerade g eine Ebene σ, welche durch die Spitze geht, indem man durch S eine Gerade p parallel zu g zieht. Die Verbindungsgerade der Punkte G_1 und P_1 ist die Grundspur s_1. Sie schneidet den Grundkreis in A_1 und B_1. Die Ebene σ schneidet den Kegel in den Erzeugenden A_1S und B_1S, welche auf g die Schnittpunkte Q und R liefern. Beide Punkte sind im Grund- und Aufrisse sichtbar, also auch die Gerade gleich bei der Eintritt- und Austrittstelle sichtbar.

Übungsaufgaben: 1. Es sind die scheinbaren Umrisse der Kugel zu suchen, welche

α) durch vier gegebene Punkte geht (einem Tetraeder umschrieben ist) [1 Lösung];

β) vier gegebene Ebenen berührt (einem Tetraeder eingeschrieben ist [8 Lösungen];

γ) durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt [2 Lösungen];

δ) drei gegebene Ebenen berührt und durch einen gegebenen Punkt geht [8 Lösungen, 2 oder 0 reelle];

ε) durch drei Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt [2 Lösungen];

ζ) drei Ebenen und eine Gerade berührt [8 Lösungen, höchstens 8 Paare reell];

η) drei Gerade einer Ebene und eine außerhalb liegende Gerade berührt [8 Lösungen];

ϑ) drei Gerade, die durch einen Punkt gehen, und eine nicht durch den Punkt gehende Gerade berührt [8 Lösungen];

ι) vier Gerade berührt, die ein windschiefes Viereck bilden [8 Lösungen];

$\varkappa$) durch zwei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Ebenen berührt [4 Lösungen].[12]

2. Zwei Punkte A, B und eine Gerade g sind gegeben. Man bestimme ein Rechteck, welches AB als Diagonale besitzt und einen dritten Eckpunkt auf der Geraden g hat.

3. Zwei Ebenen α, β und eine Gerade g sind gegeben. Man lege durch g eine Ebene ε, welche α und β in zwei zueinander normalen Geraden schneidet.

4. Zu einer Geraden, welche die Kugel in reellen Punkten schneidet, ist die Polargerade zu konstruieren.

5. Ein Punkt P und zwei Kugeln $[M, r]$, $[N, s]$ sind gegeben. Man sucht Ebenen, welche durch P gehen und beide Kugeln berühren.

6. Es sind drei parallele Gerade im Grund- und Aufrisse gegeben. Man suche die Achse eines Drehzylinders, welcher die drei Geraden als Erzeugende besitzt.

7. Es sind drei Gerade e, s, t gegeben. Man soll die Achse eines Drehzylinders finden, welcher die Gerade e als Erzeugende und die beiden anderen Geraden als Tangenten besitzt.

8. Es sind vier Gerade a, b, c, d gegeben. Man soll eine Gerade finden, welche zu d parallel ist und von a, b, c gleichen Abstand hat.

9. Drei parallele Gerade a, b, c und eine dazu windschiefe Gerade d sind gegeben. Man suche einen Punkt P, der von a, b, c und d gleichen Abstand hat.

10. Zwei windschiefe Gerade a und b sind gegeben.

α) Man soll ein gleichschenkliges Dreieck von gegebener Basis und Höhe finden, so daß die Basis auf der einen Geraden und die Spitze auf der anderen Geraden liegt.

β) Man soll Gerade finden, welche a und b schneiden, mit a den Winkel α bilden und zwischen a und b die Strecke s enthalten.

11. Durch einen Punkt P sind Gerade zu legen, welche von zwei windschiefen Geraden a und b bestimmte Abstände haben.

12. Auf einer Ebene ε sind jene Geraden zu suchen, welche von zwei außerhalb der Ebene gelegenen Punkten A, B gegebene Abstände a, b haben.

§ 12. Schiefer Schnitt eines normalen Kreiszylinders.

Ein normaler Kreiszylinder (Drehzylinder), dessen Achse vertikal ist, und eine zur Aufrißebene normale Ebene, welche mit der Zylinderachse den Neigungswinkel α

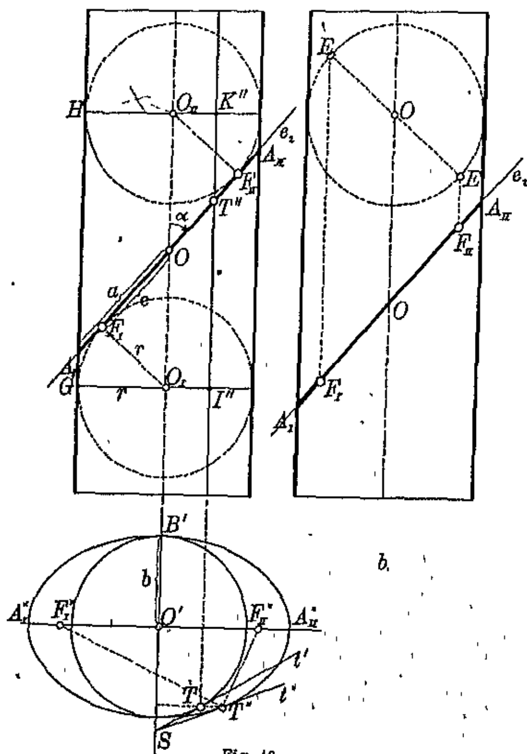


Fig 49.

bildet, seien gegeben. Die Schnittlinie des Zylinders mit der Ebene soll untersucht werden.

1. Der Aufriß der Schnittlinie (Fig. 49) ist die Strecke $A_I A_{II}$, welche auf der Spur e_2 zwischen den Umriß-erzeugenden liegt. Der Grundriß der Schnittlinie ist der Kreis $[O', r]$. Es ge[illegible] K[illegible]

Drehzylinder längs je eines Kreises berühren*). Unter diesen sind zwei, welche auch die Ebene berühren. Die scheinbaren Umrisse der beiden Kugeln sind die Kreise, welche die Umrißerzeugenden des Zylinders und die Spur e_2 berühren. Ihre Mittelpunkte O_I und O_{II} ergeben sich durch Halbieren der Winkel bei A_I und A_{II}. Die Kugeln berühren den Zylinder längs horizontaler Großkreise und die Ebene in den Fußpunkten F_I und F_{II} der Normalen aus O_I und O_{II} auf die Ebene ε.

2. Ein beliebiger Punkt T der Schnittlinie ergibt sich als Schnittpunkt der Ebene mit einer Zylindererzeugenden; seine Projektionen sind T'' (auf e_2) und T' (auf dem Grundkreise). Die Erzeugende schneidet die obenerwähnten Berührungskreise in den Punkten J und K. Verbindet man T mit F_I und F_{II}, so erhält man Tangenten der beiden Kugeln. Die Berührungstrecken aus einem Punkte T an eine Kugel sind einander gleich. Es ist also

$$\begin{array}{c} TF_I = TJ \\ TF_{II} = TK \\ \hline TF_I + TF_{II} = JK = GH. \end{array}$$

Diese Summe ist so groß wie die Strecke, welche auf allen Erzeugenden zwischen den Berührungskreisen liegt. Für den Punkt A_I ist

$$A_I F_I + A_I F_{II} = GH.$$

Nun ist aber

$$A_I F_{II} = A_{II} F_I, \quad \text{also} \quad A_I A_{II} = GH$$

und

$$TF_I + TF_{II} = A_I A_{II}. \tag{1}$$

3. Die Tangente t der Schnittlinie ist die Schnittgerade der Ebene ε mit der Tangentialebene des Zylinders für T. Die schneidende Ebene ist aber die Berührungsebene der Kugel $[O_I, r]$ für den Punkt F_I und die Tangentialebene des Zylinders für T ist zugleich die Berührungsebene der Kugel $[O_I, r]$ [illegible] Punkt J.

Zwei Berührungs[illegible] aus einem Punkte T an eine Kugel bilden [illegible] Schnittgeraden der zugehörigen Berührungs[illegible]che Winkel. Es ist also $\sphericalangle TF$ [illegible] TJ [illegible] und [illegible] $T F_{II} t = \sphericalangle TKt$.

Nun ist aber [illegible] TJ [illegible] TK [illegible]

*) Der Drehzylinder ist eine Röhrenfläche (II. Bd., § 80), bei welcher die Mittelpunktslinie eine Gerade ist.

als Scheitelwinkel, daher ist auch

$$(2) \qquad \sphericalangle TF_I t = \sphericalangle TF_{II} t.$$

Für die Punkte T und Tangenten t der Schnittlinie sind durch die Beziehungen (1) und (2) die Brennpunktseigenschaften der Ellipse nachgewiesen.

4. Wählt man eine beliebige den Zylinder längs eines Kreises berührende Kugel mit dem Mittelpunkte O und verschiebt man die obenerwähnten zwei Kugeln so lange, bis ihre Mittelpunkte O_I und O_{II} nach O kommen, so gehen die Punkte F_I und F_{II} in die Endpunkte E des zur schneidenden Ebene normalen Durchmessers der Kugel (Fig. 49 b) über. Man kann also umgekehrt die Punkte F_I und F_{II} mit Hilfe einer einzigen Kugel aus den Punkten E erhalten.

„Der schiefe Schnitt eines normalen Kreiszylinders ist eine **Ellipse.** Der Schnittpunkt der Zylinderachse mit der Ebene ist der Mittelpunkt der Ellipse. Der Normalriß der Zylinderachse auf die Ebene gibt die Lage der großen Achse an. Die halbe kleine Achse ist dem Zylinderradius gleich. Projiziert man die Endpunkte des zur schneidenden Ebene normalen Durchmessers einer beliebigen Berührungskugel in der Richtung der Erzeugenden des Zylinders auf die Ebene, so erhält man die Brennpunkte der Ellipse."

Aus dem Radius r des Zylinders und dem Winkel α, welchen die Zylinderachse mit der Ebene bildet, ergibt sich als halbe große Achse, halbe kleine Achse und Exzentrizität der Ellipse

$$a = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad b = r, \quad c = r \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

Für $\alpha = \pi/_4$ wird $c = b$. Eine solche Ellipse heißt gleichseitig.

5. Für die Umlegung der Schnittellipse auf die Horizontalebene, welche durch ihren Mittelpunkt geht, erhält man zu T' und t' des Grundkreises einen Punkt $T^\times$ und die Tangente $t^\times$ der Ellipse.

Umgekehrt: Durch jede Ellipse kann man zwei normale Kreiszylinder legen. Errichtet man im Mittelpunkte der Ellipse eine Normale zu ihrer Ebene, trägt auf diese die Strecke b auf und verbindet den Endpunkt E mit den beiden Brennpunkten, so geben die Geraden EF_I und EF_{II} die Achsenrichtungen der beiden Zylinder an, welche wirklich die gegebene Ellipse als Schnitt liefern, weil die kleine Achse und die Brennpunkte übereinstimmen.

Jede Ellipse ist mit dem Kreise $[O, b]$ orthogonal perspektiv affin. Dabei ist die Affinitätsachse die kleine Achse und die Charakteristik $\delta = a/b$.

§ 13. Normaler Schnitt eines schiefen Kreiszylinders.

1. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r liege auf einer schiefen Ebene, welche zur Aufrißebene normal ist und mit der Grundebene den Winkel ε bildet (Fig. 50). Der Aufriß des Kreises ist eine dem Durchmesser gleiche Strecke. Die zur Grundebene normalen Sehstrahlen, welche den Kreis treffen, bilden einen schiefen Kreiszylinder. Der Grundriß des Kreises ist ein Normalschnitt dieses schiefen Kreiszylinders. Um den Grundriß des Kreises näher zu untersuchen, legt man den Kreis um den horizontalen Durchmesser $A_I A_{II}$ um. Der Endpunkt B des grundspurnormalen Durchmessers hat die Umlegung $B^\times$ und die Projektionen B', B'', wobei

$$O''B'' = r$$

ist. Dieser Punkt B liegt um $B''C''$ höher als der Mittelpunkt O. Aus einem beliebigen Punkte $T^\times$ des umgelegten Kreises und aus der zugehörigen Tangente $t^\times$ erhält man den Punkt T' der Projektion des Kreises und die zugehörige Tangente t' unter Beachtung der Affinität. Trägt man

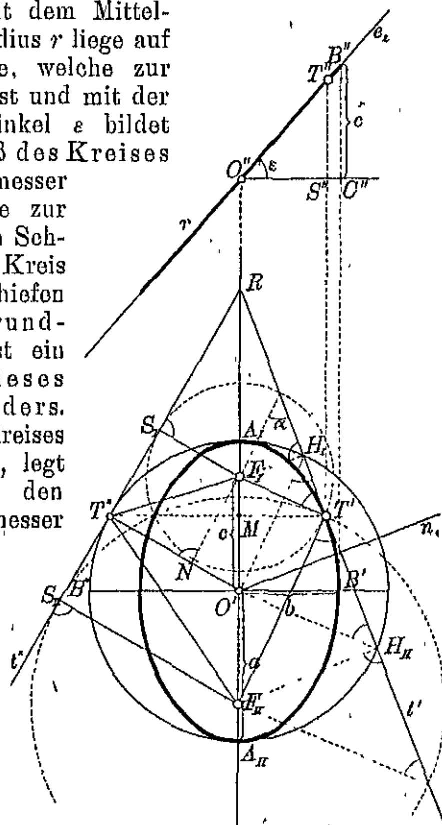


Fig. 50.

den Höhenunterschied $B''C''$ von O' aus auf den Durchmesser $A_I A_{II}$ auf, so erhält man zwei Punkte F_I und F_{II}. Nun fällt man die Normalen $F_I S_I$ und $F_{II} S_{II}$ auf $t^\times$ und die Normale $F_I N$ auf den Halbmesser $O'T^\times$. Wegen der Gleichheit der Winkel ist nun das Dreieck

$$O''B''C'' \sim O''T''S'' \quad \text{und} \quad O'T^\times M \sim O'F_I N.$$

Daraus folgt die Proportionalität der Seiten der Dreiecke.

$$\frac{O''B''}{O''T''} = \frac{B''C''}{S''T''}, \qquad \frac{O'T^\times}{MT^\times} = \frac{O'F_I}{NF_I}.$$

Da die ersten drei Glieder der beiden Proportionen übereinstimmen, so müssen auch die vierten Glieder übereinstimmen. Es ist also

$$S''T'' = NF_I$$

und daher der Höhenunterschied

$$ST = S_I T^\times = S_{II} T^\times.$$

Nun ist

$$T^\times F_I = TF_I \quad \text{und} \quad T^\times F_{II} = TF_{II}.$$

Wegen der Gleichheit der Hypotenuse und einer Kathete ist also

$$F_I S_I T^\times \cong F_I ST \quad \text{und} \quad F_{II} S_{II} T^\times \cong F_{II} ST.$$

Es muß dann auch die zweite Kathete übereinstimmen; es ist also

$$S_I F_I = T' F_I \quad \text{und} \quad S_{II} F_{II} = T' F_{II}.$$

Für das Trapez*) $F_I S_I S_{II} F_{II}$ ist aber

$$\tfrac{1}{2}[S_I F_I + S_{II} F_{II}] = O'T^\times.$$

Daraus folgt

(1) $$T'F_I + T'F_{II} = A_I A_{II}.$$

Die Kreise $[F_I, F_I S_I]$, $[O', O'T^\times]$, $[F_{II}, F_{II} S_{II}]$ sind perspektiv ähnlich mit R als Perspektivzentrum. Der Ähnlichkeitstrahl RT' schneidet diese Kreise unter gleichen Winkeln; er bildet mit den Halbmessern der Schnittpunkte denselben Winkel α, also ist

(2) $$\sphericalangle F_I T' H_I = \sphericalangle F_{II} T' H_{II}.$$

---

*) Die Figur $F_I T' F_{II} S_{II} S_I$ bildet das Netz des Tetraeders, welches $F_I F_{II}$ [illegible] als Grundfläche und T als Spitze hat. Für das Dreikant [illegible] [illegible] denselben Winkel [illegible] OT

2. Durch die Gleichungen (1) und (2) sind für den Grundriß des Kreises die zwei Brennpunktseigenschaften einer **Ellipse** nachgewiesen.

Der Normalriß eines Kreises ist die Ellipse, deren große Achse die Projektion des spurparallelen Durchmessers, deren kleine Achse die Projektion des spurnormalen Durchmessers des Kreises ist und deren Exzentrizität dem Höhenunterschied des Endpunktes des spurnormalen Durchmessers und des Mittelpunktes gleich ist.[18]

Es ist also $a = r$, $b = r \cdot \cos \varepsilon$, $c = r \cdot \sin \varepsilon$ und $a^2 - b^2 = c^2$.

Für $\varepsilon = \pi/_4$ ist $a = r$, $b = c = r/_2 \sqrt{2}$; der Normalriß wird also in diesem Falle eine **gleichseitige** Ellipse.

Der Normalschnitt eines schiefen Kreiszylinders ist eine Ellipse. Der schiefe Kreiszylinder ist also (besser bezeichnet) ein **elliptischer Zylinder***).

Es ist auch umgekehrt aus dem Vorangehenden zu ersehen:

Jede Ellipse ist der Normalriß von $2 \times \infty^1$ Kreisen.

Der elliptische Zylinder hat zwei Lagen von Kreisschnittebenen.

Jede Ellipse ist mit dem Kreise $[O, a]$ orthogonal perspektiv affin. Dabei ist die Affinitätsachse die große Achse und die Charakteristik $\delta = b/a$.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $O'MT^{\times}$ folgt unmittelbar die **Gleichung der Ellipse:**

$$x^2 + \left(y \frac{a}{b}\right)^2 = a^2.$$

3. Da durch F_I, O', F_{II} parallele Halbmesser der drei Kreise gehen und O' der Halbierungspunkt von $F_I F_{II}$ ist, so sind auch H_I und H_{II} die Halbierungspunkte der Sehnen des ersten und dritten Kreises.

Die Strecken $F_I H_I$ und $F_{II} H_{II}$ sind daher die Höhen zweier gleichschenkliger Dreiecke, also senkrecht zu t'. Daraus ergibt sich der Satz:

Die Fußpunkte der Normalen aus den Brennpunkten einer Ellipse auf die Tangenten liegen auf dem Kreise, welcher die große Achse als Durchmesser hat.

*) Ei[illegible] Z[illegible] N[illegible] e Parabel bzw. Hyperbel ist, he[illegible] [illegible]scher Zylinder.

Dieser Satz liefert eine einfache Konstruktion der Tangenten aus einem Punkte an eine Ellipse (Fig. 51). Man zeichnet den Scheitelkreis $[O, a]$, ferner den Kreis, welcher die Strecke von P bis zu einem der beiden Brennpunkte, etwa F_I, als Durchmesser hat. Verbindet man die Schnittpunkte H_1 und H_2 der beiden Kreise mit P, so erhält man die Tangenten s, t. Verdoppelt man die Strecken $F_I H_1$ und $F_I H_2$ bis G_1 und G_2, so schneiden die Geraden $F_{II} G_1$, $F_{II} G_2$ die Tangenten s, t in

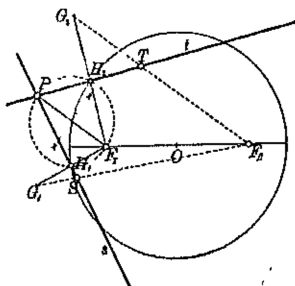


Fig. 51.

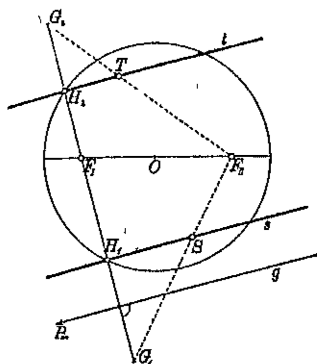


Fig. 52.

den Berührungspunkten S, T. Ist ein uneigentlicher Punkt P_∞ durch eine Gerade g gegeben (Fig. 52), so ist der Kreis mit dem Durchmesser PF_I ersetzt durch die Normale von F_I zu g.

§ 14. Polarität und Antipolarität für die Ellipse.

1. Durch die orthogonale Projektion (Affinität) des Kreises geht die Polarität und Antipolarität in bezug auf den Kreis in die Polarität und Antipolarität für die Ellipse über. Es bleiben dabei einige der früher erwähnten Eigenschaften erhalten; die Polare p und Antipolare p_n sind aber nicht mehr zur Verbindungsgeraden OP normal.

Für einen Punkt P erhält man die Polare p, indem man aus P die beiden Tangenten an die Ellipse zieht (Fig. 53) und die Berührungspunkte T_I, T_{II} verbindet. Die Antipolare p_n liegt dann in entgegengesetzt gleichem Abstande von O symmetrisch zu p. Dabei ist

$$OP \times OP' = OC^2 \quad \text{und} \quad OP \times OP'_n = -OC^2.$$

Die Polare eines inneren Punktes P' kann man erhalten, indem man durch P' zwei Gerade p und q legt, ihre Pole P und Q sucht; dann ist die Verbindungsgerade PQ die Polare p' von P'. Auf jedem Strahle aus P ist auch hier der Schnittpunkt der Polaren der vierte harmonische Punkt zu P in bezug auf die Schnittpunkte mit der Ellipse. Rückt der Punkt P auf dem Durchmesser $C_I C_{II}$ ins Unendliche (Fig. 54), so wird die Polare der zu $C_I C_{II}$ konjugierte Durchmesser $D_I D_{II}$, welcher die Berührungspunkte der zu $C_I C_{II}$ parallelen Tangenten ver-

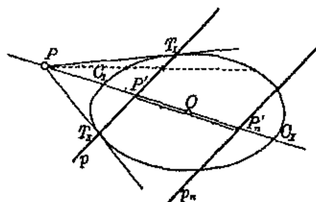


Fig. 53

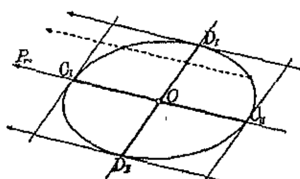


Fig. 54.

bindet. Er halbiert die Sehnen der Ellipse, welche zu $C_I C_{II}$ parallel sind oder anders ausgedrückt:

Die Ellipse ist in bezug auf jeden Durchmesser in der Richtung des konjugierten Durchmessers schief symmetrisch.

Die Ellipse besitzt ein Paar von konjugierten Durchmessern, welche zueinander normal sind: diese heißen die Achsen der Ellipse.

Die Ellipse ist in bezug auf jede der beiden Achsen orthogonal symmetrisch.

2. Durch die Affinität mit den Kreisen $[O, a]$ und $[O, b]$ lassen sich noch zahlreiche Konstruktionen und Eigenschaften für die Ellipse $[O, a, b]$ ableiten.

Nimmt man (Fig. 55) auf dem Kreise $[O, a]$ einen Punkt T_1, so erhält man den entsprechenden Punkt T der Ellipse, indem man den Abstand des Punktes T_1 von der Affinitätsachse im Verhältnisse b/a teilt. Das geschieht, indem man T_1 mit O verbindet und durch den Schnittpunkt T_2 von $T_1 O$ mit dem Kreise $[O, b]$ eine Parallele zur Affinitätsachse a zieht. Geht man vom Punkte T_2 des Kreises $[O, b]$ aus, so hat man die gleichen Linien zu ziehen. Die Tangente t der

Ellipse für T geht durch den Schnittpunkt R von t_1 mit a und durch den Schnittpunkt S von t_2 mit b.

Es kann hier die folgende Aufgabe gelöst werden:

„Die Schnittpunkte einer Ellipse $[O, a, b]$ mit einem konzentrischen Kreise $[O, r]$ sind mit Lineal und Zirkel zu konstruieren."

Denkt man sich (Fig. 56) das zum Schnittpunkte T gehörige rechtwinklige Dreieck $T_1 T_2 T$ und dreht den Radius OT_1 nach OA, so kommt T_2 nach T_2^0 und T nach T^0. Dieser Punkt T^0 ergibt sich als Schnittpunkt eines Kreises, welcher $AT_2^0 = a - b$ als Durchmesser hat, mit dem gegebenen Kreise $[O, r]$. Überträgt man den Abstand des Punktes O von der Geraden $f_2^0 = T_2^0 T^0$ auf die kleine Achse und zieht man

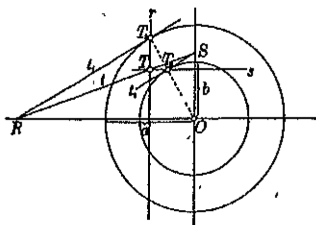


Fig. 55.

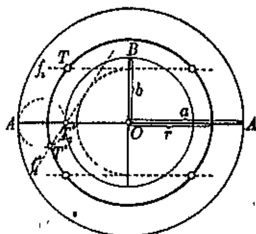


Fig. 56.

durch die Endpunkte je eine Parallele f_2 zur großen Achse, so schneiden diese zwei Parallelen den Kreis $[O, r]$ in den verlangten vier Schnittpunkten. Zu einer anderen Lösungsart führt die Kugel $[O, a]$.

Übungsaufgaben: 1. Von einer Ellipse ist eine Achse und ein Punkt oder eine Tangente gegeben; die andre Achse ist zu finden.

2. Es sind die gleichen konjugierten Durchmesser einer Ellipse $[O, a, b]$ zu suchen.

3. Aus der Fig. 55 ist auch folgendes zu ersehen:

Die Polare r, bzw. Antipolare r_n eines Punktes R der großen Achse einer Ellipse in bezug auf den Kreis $[O, a]$ ist zugleich die Polare bzw. Antipolare des Punktes R in bezug auf die Ellipse.

Die Polare s, bzw. Antipolare s_n eines Punktes S der kleinen Achse einer Ellipse in bezug auf den Kreis $[O, b]$ ist zugleich die Polare bzw. Antipolare des Punktes S in bezug auf die Ellipse.

Nach dem Satze von § 10, 1, der auch hier gilt, kann nun leicht der Pol P einer Geraden p konstruiert werden. Man sucht (Fig. 57) für die Schnittpunkte R, S von p mit a, b die Polaren r, s; ihr Schnittpunkt P ist der Pol von p. Sucht man

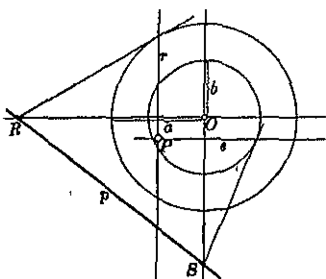


Fig. 57.

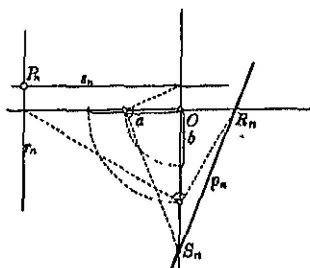


Fig. 58.

(Fig. 58) für die Schnittpunkte R_n, S_n einer Geraden p_n mit a, b die Antipolaren r_n, s_n, so ist ihr Schnittpunkt P_n der Antipol von p_n in bezug auf die Ellipse $[O, a, b]$.

§ 15. Konjugierte Durchmesser einer Ellipse; Achsenkonstruktion.

1. Betrachtet man wieder die Affinität einer Ellipse $[O, a, b]$ mit den beiden Kreisen $[O, a]$ und $[O, b]$ und zieht man in diesen Kreisen die zueinander senkrechten Halbmesser OC_1, OD_1, bzw. OC_2, OD_2, so erhält man daraus (Fig. 59) zwei konjugierte Halbmesser $OC = c$, $OD = d$ der Ellipse.

Wegen Gleichheit der Hypotenusen und der Winkel ist das rechtwinklige Dreieck $OX_I C_1 \cong D_1 X_{II} O$. Daher ist

$$C_1 X_I = OX_{II} \quad \text{und} \quad OX_I = D_1 X_{II}.$$

Daraus folgt

$$OX_I^2 + OX_{II}^2 = a^2.$$

Ebenso ist

$$OY_I^2 + OY_{II}^2 = b^2.$$

Durch Addition dieser zwei Gleichungen ergibt sich dann

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Da je zwei rechtwinklige Halbmesser des Kreises wie OC_1 und OD_1 kongruente Dreiecke einschließen, so haben die

Projektionen dieser Dreiecke, nämlich die Dreiecke OCD gleiche Fläche. Daraus folgt dann

(2) $$cd \sin (cd) = ab.$$

„Für je zwei konjugierte Halbmesser einer Ellipse ist einerseits die Summe der Quadrate, anderseits ihr Produkt in den Sinus des eingeschlossenen Winkels konstant."

Fig. 59.

Die Fläche der Ellipse, welche die Projektion des Kreises $[O, a]$ ist, ergibt sich aus der Fläche $f = a^2 \cdot \pi$ dieses Kreises durch Multiplikation mit der Charakteristik $\delta = b/a$. Daher ist die Fläche der Ellipse

$$f' = ab \cdot \pi.$$

2. Zieht man durch D eine Parallele zu OD_1, so entstehen zwei Parallelogramme und es ist

$$\begin{array}{l} DE = OD_1 = a \\ DF = OD_2 = b \\ \hline EF = D_1 D_2 = a - b. \end{array}$$

Zieht man durch D_1 die Parallele zu a und durch D_2 die Parallele zu b, so erhält man den Eckpunkt L eines Rechteckes. Die zweite Diagonale DL ergibt die Punkte G, H. Da die Diagonalen des Rechteckes gegen die Achsen gleich geneigt sind, so ist

$$\begin{array}{c} DG = OD_1 = a \\ DH = OD_2 = b \\ \hline GH = ON = a + b. \end{array}$$

Übungsaufgabe: Von einer Ellipse ist eine Achse (a oder b) und ein Punkt D gegeben (§ 14, 2). Diese Aufgabe kann hier so gelöst werden: Kreis $[D, a]$ gibt die Schnittpunkte E, G; dann ist $DF = DH = b$. Bzw. Kreis $[D, b]$ gibt die Schnittpunkte F, H; dann ist $DE = DG = a$.[11]

Nun ist
$$C_1 C_2 = D_1 D_2 = a - b$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle L = \pi/2 \quad \text{und} \quad \sphericalangle C_1 = \sphericalangle D_1,$$
weil die Schenkel des einen Winkels auf jenen des andern senkrecht stehen; daher ist das Dreieck
$$C C_1 C_2 \cong L D_1 D_2.$$
Die Figur OCC_1C_2 kommt durch Drehung um $\pi/2$ mit OLD_1D_2 zur Deckung. Es ist also OC gleich und senkrecht zu OL.

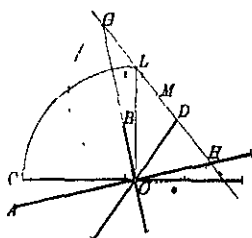


Fig. 60.

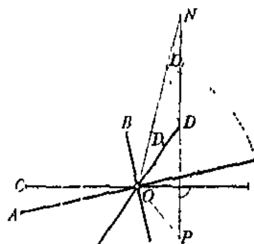


Fig. 61

Zieht man noch durch G eine Parallele zur großen Achse und durch H eine Parallele zur kleinen Achse, so ergibt sich ein Schnittpunkt N, der auf OD_1 liegt. Alle Punkte N bilden einen Kreis $[O, a + b]$. Dabei sind zwei ähnliche Rechtecke LD_1DD_2 und $GNHO$ entstanden. Der Schnittpunkt von GH und ON ist der Mittelpunkt M des dem letzteren Rechtecke umschriebenen Kreises, welcher den Radius $MO = \frac{a+b}{2}$ hat. Es ist daraus zu ersehen, daß man aus zwei konjugierten Durchmessern wieder die Achsen finden kann.

Erste Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Halbmessern OC und OD (Fig. 60):

Man zeichnet OL senkrecht und gleich dem einen der beiden Halbmesser, z. B. OC, verbindet L mit D und sucht den Halbierungspunkt M der Strecke LD. Der Kreis mit dem Mittelpunkte M und dem Radius MO schneidet dann die Verbindungsgerade LD in den Punkten G und H, durch welche die Achsen gehen, und zwar liegt die große Achse im Spitzwinkel der konjugierten Durchmesser (§ 5, 3, γ). Auf ihr ist dann die Strecke $OA = DG$ zu machen, während auf der kleinen Achse die Strecke $OB = DH$ gemacht wird.

3. Zieht man auch noch durch E eine Parallele zur großen und durch F eine Parallele zur kleinen Achse, so ergibt sich ein Schnittpunkt P, so daß $OP = EF = a - b$ ist. Alle Punkte P bilden also einen Kreis $[O, a-b]$. Dabei ist der Winkel NOH immer gleich dem Winkel POH.

Nun ist	$MO = MN$	$OD = OD$
	$ML = MD$	$LD = OP = a - b$
(Scheitelw.)	$\sphericalangle M = \sphericalangle M$	$\sphericalangle D = \sphericalangle O$
	Dreieck $OLM \cong NDM$;	Dreieck $ODL \cong DOP$;
daher ist	$OL \# DN$ und	$OL \# DP$,

d. h. die Punkte N, D, P liegen auf einer Geraden, welche zu OC senkrecht ist. Da die Tangente für D zum Halbmesser OC parallel ist, so ist die Gerade NDP die Normale des Punktes D der Ellipse. Man kann daher die Normale für einen Punkt D der Ellipse durch bloßes Verbinden mit dem entsprechenden Punkte N des Kreises $[O, a+b]$, bzw. mit dem Punkte P des Kreises $[O, a-b]$ sehr einfach erhalten. Daraus ergibt sich eine zweite Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Halbmessern OC und OD (Fig. 61):

Man fällt vom Endpunkte des einen Halbmessers, z. B. OD, auf den konjugierten Halbmesser OC eine Normale und trägt auf ihr von D aus die Strecke OC nach beiden Seiten hin auf. Die erhaltenen Endpunkte N und P verbindet man mit O. Die beiden Halbierungsgeraden des Winkels NOP sind die Richtungen der Achsen. Die Parallelen DD_1 und DD_2 zu diesen Richtungen geben in OD_1 und OD_2 die Größen a und b der Halbachsen.[15]

4. Es seien wieder (Fig. 62) OC_1, OD_1 zwei normale Halbmesser des Kreises $[O, a]$ und OC, OD die daraus hervorgehenden konjugierten Halbmesser der Ellipse $[O, a, b]$.

Zieht man die halbe Sehne H_1T_1 parallel zu OC_1 und durch die beiden Punkte H_1, T_1 die Affinitätstrahlen, so erhält man zunächst auf OD den entsprechenden Punkt H, durch welchen dann HT parallel zu OC geht. Dabei wird die Sehne im selben Verhältnisse verkleinert wie der parallele Halbmesser; es verhält sich daher $HT : H_1T_1 = OC : OC_1 = c : a$. Sucht man nun wieder den Punkt L der Fig. 59 und bezeichnet ihn mit D_3, so ist OD_3 der zu OC senkrechte Halbmesser des Kreises $[O, c]$. Dreht man den Kreis $[O, a]$ um den Winkel C_1OC und verkleinert man ihn im Verhältnisse $c : a$, so geht er in den Kreis $[O, c]$ über, und zwar die Punkte C_1, D_1 in die Punkte C, D_3. Aus H_1 geht ein Punkt H_3 hervor, den man auf OD_3 erhält, indem man durch H_1 eine Parallele zu D_1D_3 zieht. Das Dreieck HH_1H_3 ist perspektiv ähnlich dem Dreiecke DD_1D_3, also HH_3 parallel zu DD_3. Durch H_3 geht dann H_3T_3 parallel zu OC, so daß

$H_3T_3 : H_1T_1 = c : a$

ist. Es ist also H_3T_3 gleich und parallel HT, woraus folgt,

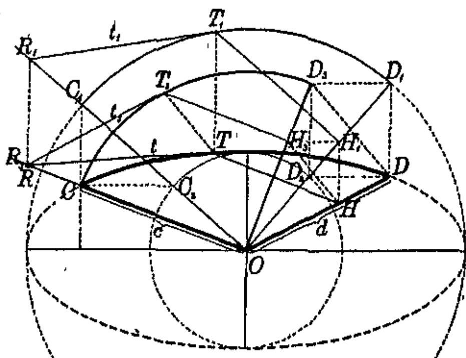


Fig. 62.

daß TT_3 parallel HH_3 und parallel DD_3 ist. Aus der Tangente t_1 für T_1 ergibt sich die Tangente t der Ellipse für T durch den Affinitätstrahl R_1R. Bei Drehung und Verkleinerung geht der R_1 in einen Punkt R_3 über, den man auch durch eine Parallele zu C_1C erhält und welcher also mit R zusammenfällt. Die Geraden t und t_3 schneiden sich somit im selben Punkte der Geraden OC. Es ist sohin die schon [illegible] Verwandtschaft vorhanden.

Die Ellipse $[O, c, d]$, für welche c, d zwei konjugierte Halbmesser sind, ist mit dem Kreise $[O, c]$ perspektiv affin. Die Richtung der Affinitätstrahlen ist durch die Gerade DD_3 angegeben, welche den Endpunkt D des konjugierten Halbmessers der Ellipse mit dem Endpunkte D_3 des normalen Kreis-

durchmessers verbindet. Die Affinitätsachse ist die Gerade c. Die Charakteristik

$$\delta = \frac{d}{c} \cdot \sin(cd).$$

Dreht man den Kreis $[O, c]$ um die Gerade c aus der Ebene heraus, so bleiben die Verbindungsgeraden TT_3 parallel zu HH_3 und DD_3 und bilden einen schiefen Kreiszylinder.

Der schiefe Kreiszylinder wird von einer Ebene im allgemeinen nach einer Ellipse geschnitten.

Die Parallelprojektion (der Parallelschatten) eines Kreises oder einer Ellipse ist im allgemeinen eine Ellipse. Aus konjugierten Durchmessern der einen Linie erhält man wieder konjugierte Durchmesser der andern.

Fig. 63.

Fig. 64.

5. Eine Ellipse sei durch die konjugierten Halbmesser OC, OD gegeben. Man kann dann mit Lineal und Zirkel konstruieren (ohne die Linie selbst zu zeichnen):

a) Die Schnittpunkte einer Geraden g mit der Ellipse (Fig. 63).

Man zeichnet den Kreis $[O, c]$, zieht den zu OC senkrechten Halbmesser OD^0; dann ist DD^0 die Richtung der Affinitätsstrahlen. In dieser Verwandtschaft der Ellipse mit dem Kreise entspricht der Geraden g eine Gerade g^0, welche die Affinitätsachse im selben Punkte schneidet. Zieht man durch D eine Gerade f parallel zu g, so muß die entsprechende Gerade f^0 durch den Schnittpunkt mit der Affinitätsachse und anderseits durch D^0 gehen. Die Gerade g^0 muß zu f^0 parallel sein. Sie schneidet den Kreis $[O, c]$ in den Punkten Q^0, R^0, aus welchen man durch Affinitätstrahlen die verlangten Schnittpunkte Q, R findet.

β) Die Tangenten der Ellipse, welche zur Geraden g parallel sind (Fig. 63).

Der Durchmesser des Kreises $[O, c]$, welcher zu f^0 senkrecht ist, ergibt die Berührungspunkte S^0, T^0 der zu f^0 parallelen Tangenten s^0, t^0 des Kreises. Sie schneiden die Affinitätsachse in zwei Punkten, durch welche die Tangenten s, t der Ellipse gehen, die zu g parallel sind. Durch Affinitätsstrahlen erhält man aus S^0, T^0 die Berührungspunkte S, T für s, t. Die Verbindungsgerade $ST = p$ muß durch O gehen; sie ist die Polare p des uneigentlichen Punktes P_∞ von g.

γ) Die Tangenten aus einem Punkte P an die Ellipse; die Polare p eines Punktes P (Fig. 64).

Man zieht durch P eine Parallele zu OD, durch ihren Schnittpunkt mit der Affinitätsachse eine Parallele zu OD^0 und dann wieder durch P den Affinitätstrahl parallel zu DD^0, wodurch sich der dem Punkte P entsprechende Punkt P^0 ergibt. Jetzt konstruiert man die Tangenten s^0, t^0 aus P^0 an den Kreis und ihre Berührungspunkte S^0, T^0. Die Geraden s^0, t^0 schneiden die Affinitätsachse in zwei Punkten, welche mit P verbunden die verlangten Tangenten s, t ergeben. Aus S^0, T^0 erhält man durch Affinitätstrahlen die Punkte S, T, deren Verbindungsgerade die Polare p von P ist.

§ 16. Krümmung einer Linie, insbesondere der Ellipse.

1. Eine gesetzmäßige, stetige Folge von ∞^1 Punkten oder Geraden einer Ebene ergibt eine ebene Linie oder Plankurve*).

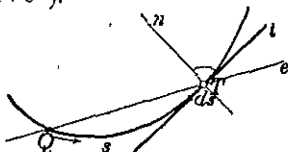


Fig. 65.

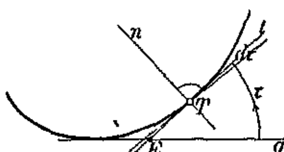


Fig. 66.

Zwei Punkte Q, T der Linie bestimmen eine Sekante e und einen Bogen s (Fig. 65): Nähert sich der Punkt Q dem Punkte

Zwei Tangenten q, t der Kurve bestimmen einen Schnittpunkt E und einen Winkel τ (Fig. 66). Nähert

*) Es sollen nur analytische (algebraische und transzendente) Linien in Betracht gezogen werden.

T, so dreht sich die Gerade e um T und kommt bei Vereinigung von Q mit T in eine Grenzlage t. Diese Gerade t (Verbindungsgerade benachbarter Punkte) heißt dann die **Tangente des Punktes** T. Die Sehne QT wird für zwei benachbarte Punkte zum **Bogenelemente** ds.

sich die Gerade q der Geraden t, so verschiebt sich der Punkt E auf t und kommt bei Vereinigung von q mit t in eine Grenzlage T. Dieser Punkt T (Schnittpunkt benachbarter Tangenten) heißt dann der **Berührungspunkt der Tangente** t. Der Winkel qt wird für zwei benachbarte Tangenten zum **Kontingenzelement** $d\tau$.

Die zur Tangente t im Berührungspunkte T normale Gerade n heißt die **Normale der Linie für den Punkt** T.

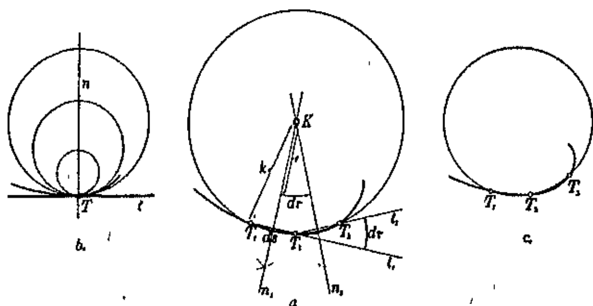


Fig. 67.

2. Man kann beide Entstehungsweisen einer krummen Linie zugleich in Betracht ziehen (Fig. 67a). Man verschiebt den Punkt T_1 auf der Geraden t_1 um das Bogenelement ds nach T_2 und dreht dann die Gerade t_1 um den Punkt T_2 um das Kontingenzelement $d\tau$ nach t_2, dann verschiebt man wieder den Punkt T_2 auf der Geraden t_2 um das Bogenelement ds nach T_3 usw. Setzt man voraus, daß der Punkt immer um ein gleich großes Bogenelement [illegible] wird, so wird sich das K[illegible] Gesetze verändern: [illegible] Kreise — wird [illegible] immer gleich [illegible]

Die [illegible] Punkt T [illegible] besitzen, [illegible] Mittelpunk[illegible] (Fig. 67b). [illegible]

der Linie zwei benachbarte Punkte T_1 und T_2 gemein. Unter diesen Kreisen gibt es einen, welcher auch durch den dritten benachbarten Punkt T_3 der Linie geht, welcher sich also der Linie mehr als die anderen anschmiegt. Sein Mittelpunkt K ist der Schnittpunkt zweier benachbarter Normalen n_1 und n_2, deren Winkel dem Kontingenzelement $d\tau$ gleich ist (weil die Geraden zu t_1 und t_2 normal sind); sein Radius sei k. Der Kreisbogen, welcher zwischen den Normalen n_1 und n_2 liegt, ist dem Bogenelemente ds gleich. Der Einheitskreis (dessen Radius die Längeneinheit ist) mit dem Mittelpunkte K ergibt zwischen den Normalen einen Kreisbogen, welcher das Maß des Kontingenzelementes $d\tau$ ist. Nun folgt unmittelbar aus der Ähnlichkeit

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{k}.$$

Der Grenzwert dieses Verhältnisses des veränderlichen Kontingenzelementes zum Bogenelemente heißt die Krümmung der Linie im Punkte T, ferner K der Krümmungsmittelpunkt, k der Krümmungsradius und der Kreis $[K, k]$ der Krümmungskreis (Schmiegungskreis).

Die Seite, auf welcher die Tangente liegt, heißt die erhabene oder konvexe Seite der Linie, jene, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt liegt, heißt die hohle oder konkave Seite der Linie. Der Krümmungskreis geht an der Schmiegungstelle von der hohlen zur erhabenen Seite der Linie über, wie die Fig. 67c im übertriebenen Maße zeigt.

3. Ein Dreieck ABC habe die Seiten a, b, c, die Fläche f und einen Radius des umschriebenen Kreises r_r.	Seine Parallelprojektion $A'B'C'$ habe die Seiten a', b', c', die Fläche f' und einen Radius des umschriebenen Kreises r_p.

Für die Halbmesser dieser beiden Kreise gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$r_r=\frac{abc}{4f} \quad \text{und} \quad r_p=\frac{a'b'c'}{4f'}.$$

Es ist dann das Verhältnis

$$\frac{r_p}{r_r}=\frac{\frac{a'}{a}\cdot\frac{b'}{b}\cdot\frac{c'}{c}}{\frac{f'}{f}}=\frac{\lambda_a\cdot\lambda_b\cdot\lambda_c}{\varphi},$$

Dabei ist λ die Längenverzerrung in der Richtung der betreffenden Seite und φ die Flächenverzerrung des Dreieckes.

Werden A, B, C drei benachbarte Punkte T_1, T_2, T_3 einer Linie, so gehen die beiden Kreise in den Krümmungskreis für die Stelle T der Linie und in jenen für den Punkt T' der Projektion über. Beim Grenzübergange nehmen die drei Seiten die Richtung der Tangente an; es wird also $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c$ die Längenverzerrung λ in der Richtung der Tangente t des Punktes T der Linie.

Der Krümmungsradius für einen Punkt der Parallelprojektion einer ebenen Linie hängt mit dem Krümmungshalbmesser des entsprechenden Punktes der Linie durch die Gleichung zusammen:

$$\frac{k_p}{k_r} = \frac{\lambda^3}{\varphi}.$$

Für Parallelprojektion und Umlegung wird die Flächenverzerrung φ der Charakteristik δ der Affinität gleich. Für Orthogonalprojektion (§ 4, 3 und § 6, 5) ergibt sich

$$\frac{k_p}{k_r} = \frac{\sin \alpha^3}{\cos \varepsilon},$$

wobei α der Einfallswinkel der Tangente und ε der Neigungswinkel der Ebene gegen die Projektionsebene ist.[16]

4. Eine Ellipse $[O, a, b]$ kann als Orthogonalprojektion des Kreises $[O, a]$ betrachtet werden, der auf die Projektionsebene umgelegt sei (Fig. 68).

Für die Scheitel A und B ist

$$\lambda_A = \frac{b}{a}, \quad \lambda_B = 1,$$

$$\varphi = \delta = \frac{b}{a}.$$

Aus
$$k_p = k_r \cdot \frac{\lambda^3}{\delta}$$
folgt
$$k_A = \frac{b^2}{a};$$
$$k_B = \frac{a^2}{b}.$$

Eine Ellipse $[O, c, d]$ kann als Parallelprojektion des Kreises $[O, c]$ betrachtet werden, der auf die Projektionsebene umgelegt sei (Fig. 69).

Für die Punkte C und D ist

$$\lambda_C = \frac{d}{c}, \quad \lambda_D = 1,$$

$$\varphi = \delta = \frac{d}{c} \cdot \sin(cd).$$

Aus
$$k_p = k_r \cdot \frac{\lambda^3}{\delta}$$
folgt
$$k_C = \frac{d^2}{c \cdot \sin(cd)},$$
$$k_D = \frac{c^2}{d \cdot \sin(cd)}.$$

Zeichnet man die Scheiteltangenten und fällt man vom Schnittpunkt J die Normale zur Verbindungsgeraden AB der Scheitel, so schneidet diese Normale die Achsen in den Krümmungsmittelpunkten K_A und K_B für die Scheitel.

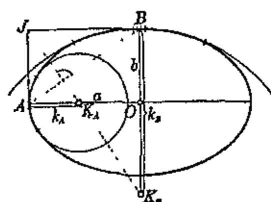


Fig. 68

Nämlich aus der Gleichheit der Winkel folgt:

$AJK_A \backsim JBA; BJK_B \backsim JAB.$

Nun folgt die Proportionalität der Seiten:

$$k_A : b = b : a, \qquad k_B : a = a : b,$$

$$k_A = \frac{b^2}{a}, \quad k_B = \frac{a^2}{b}.$$

Zeichnet man die Tangenten für C und D, fällt vom Schnittpunkte J die Normale JH zu OC und dann die Senkrechte von J zur Verbindungsgeraden HD, so schneidet diese Senkrechte die Normale der Ellipse für D im Krümmungsmittelpunkte K_D für den Punkt D.

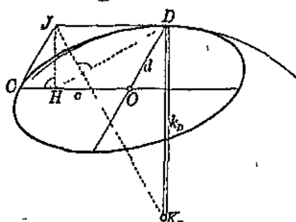


Fig. 69.

Nämlich aus der Gleichheit der Winkel folgt:

$DJK_D \backsim JHD.$

Nun folgt die Proportionalität der Seiten:

$$k_D : c = c : JH,$$

$$k_D = \frac{c^2}{d \cdot \sin (cd)}.$$

Damit ist die Richtigkeit der Konstruktionen gezeigt.[17]

5. Es sei für eine Ellipse $[O, a, b]$ wieder dieselbe Annahme wie in Fig. 59 gemacht. Die Normale DN für den Punkt D der Ellipse (Fig. 70) schneidet die Achsen in den Punkten U, V. Nun ist das Verhältnis

$$DU : OD_2 = DN : ND_2 \quad \text{und} \quad DV : OD_1 = DN : ND_1$$

$$DU : b = c : a, \qquad DV : a = c : b,$$

$$DU = c \cdot \frac{b}{a}, \qquad DV = c \cdot \frac{a}{b}.$$

Rückt D nach A, so wird

$$c = b,$$

$$DU = k_A = \frac{b^2}{a}.$$

Rückt D nach B, so wird

$$c = a,$$

$$DV = k_B = \frac{a^2}{b}.$$

U ist der Mittelpunkt und UD der Radius eines Kreises, welcher die Ellipse in zwei Punkten berührt. Rückt D nach A, so vereinigen sich die beiden Berührungspunkte und der

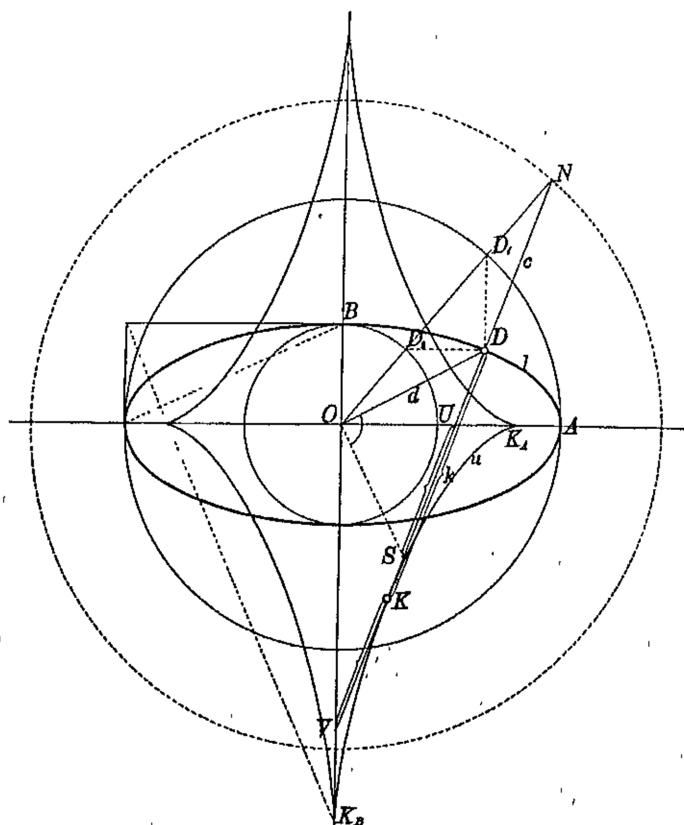


Fig. 70.

doppelt berührende Kreis wird zum Krümmungskreise für den Scheitel A. Daraus ist zu sehen, daß **der Krümmungskreis für den Scheitel mit der Ellipse vier benachbarte Punkte gemein hat.** Er schmiegt sich also mehr als ein anderer an die Ellipse.

Bildet man

$$DU+DV=c\frac{a^2+b^2}{ab}=c\frac{c^2+d^2}{cd\cdot\sin(cd)}$$
$$=\frac{c^2}{d\cdot\sin(cd)}+\frac{d}{\sin(cd)},$$

so ist $DU+DV=DK+DS.$

Daraus folgt

$$DS-DU=DV-DK,$$

also

$$SU=VK.$$

Es ergibt sich hiermit folgende einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes K für einen beliebigen Punkt D der Ellipse: „Man errichtet in O eine Senkrechte zum Halbmesser OD bis zum Schnittpunkte S mit der Normalen und überträgt dann die Strecke SU nach VK."

Besonderer Fall: Zieht man den Strahl OD_1 unter $\pi/_4$, so wird $c=d$ und $DK=DS$. Hier ist also der Punkt S auch schon der Krümmungsmittelpunkt K.

Die Normalen einer Linie l bilden die Tangenten einer neuen Kurve u. Die Krümmungsmittelpunkte der Linie l bilden als Schnittpunkte benachbarter Normalen der Linie l und Schnittpunkte benachbarter Tangenten von u die Berührungspunkte für u. Diese Kurve u heißt die Evolute der Linie l.

Zeichnet man die Evolute u der Ellipse l (Fig. 70), so läßt sie erkennen, daß die Krümmungshalbmesser für die Scheitel der Ellipse Extreme sind, und zwar am kleinsten für die Scheitel der großen Achse und am größten für die Scheitel der kleinen Achse.

Übungsaufgabe: Es ist die Evolute einer gleichseitigen Ellipse zu zeichnen $[k_A=a/_2,\ k_B=2b]$.

§ 17. Zeichnen einer Linie, insbesondere der Ellipse.

1. Um eine Linie von bekanntem Bildungsgesetze zu zeichnen, soll eine größere Anzahl von Punkten mit den zugehörigen Tangenten konstruiert werden. Dabei sind besondere Stellen im Verlaufe der Linie (z. B. Scheitel) auch besonders zu beachten, weil das Auge für Stetigkeit und Regelmäßigkeit (z. B. Symmetrie) empfindlich ist.

Beim freihändigen Zeichnen der Linie mit dem Bleistifte legt man die zeichnende Hand gewöhnlich auf die hohle Seite des zu zeichnenden Linienteiles, und zwar wird der Stift bei einem stark gekrümmten Teile mehr kurz gefaßt und steil gehalten. Das freihändige Ausziehen einer solchen Bleistiftlinie mit der Zeichenfeder gelingt nur geschickten Zeichnern, weil die Einhaltung der Strichstärke neben der Verfolgung des Linienzuges besondere Aufmerksamkeit erfordert. Für das Ausziehen einer Bleistiftlinie mit der Reißfeder benützt man ein Kurvenlineal. Durch versuchsweises Anlegen an die sorgfältig gezeichnete Bleistiftlinie sucht man ein passend gekrümmtes Stück des Kurvenlineals. Dabei ist darauf zu achten, daß der Linealbogen auch noch mit einem Stücke des bereits ausgezogenen Teiles der Linie übereinstimmt (§ 26, 3). Anderseits sucht man die Linienteile durch Kreisbogen zu ersetzen, welche möglichst wenig von der Linie verschieden sind.

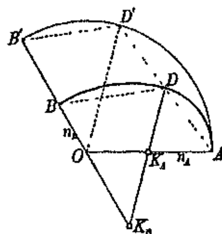


Fig. 71.

2. Um zwischen zwei Punkten A und B einer Linie, zu welchen die Normalen n_A, n_B gehören, zwei Kreisbogen einzuschalten, deren Mittelpunkte K_A, K_B auf diesen Normalen liegen und welche sich in einem Zwischenpunkte berühren, kann man folgende Konstruktion benützen (Fig. 71):

Man zeichnet einen Kreis, der den Schnittpunkt O der beiden Normalen als Mittelpunkt und OA als Radius hat. Auf ihm ergibt die Normale n_B einen Schnittpunkt B'. Ein passend gewählter Strahl aus O schneidet den Kreis in D'. Die Parallele durch B zu $B'D'$ schneidet AD' in D. Die Parallele durch D zu OD' schneidet die Normalen in K_A und K_B, den Mittelpunkten der Kreisbogen AD und BD, welche bei D berührend ineinander übergehen. Die Richtigkeit ist aus der Ähnlichkeit leicht zu ersehen; es ist nämlich

$$OAD' \backsim K_A AD \quad \text{und} \quad OB'D' \backsim K_B BD.$$

Diese Konstruktion ist unmittelbar auf eine durch ihre Achsen gegebene Ellipse $[O, a, b]$ anwendbar. Dabei ist der Strahl OD' passend gewählt, wenn er senkrecht zu AB, senkrecht zu AB und zwischen diesen beiden Lagen angenommen wird.

Theoretisch genommen, schmiegt sich der **Krümmungskreis** am engsten an eine Linie an. Da er sich aber gewöhnlich bald nach der Oskulationstelle wieder von der Linie entfernt, so kann nur ein kurzer Kreisbogen benützt werden. Es müßten also zahlreiche Punkte und Tangenten der Evolute gezeichnet vorliegen. Vorteilhaft sind hauptsächlich die **Krümmungskreise für Scheitel einer Linie** (§ 16, 5). So können bei

Fig. 72.

einer **Ellipse** $[O, a, b]$ zumeist so große Stücke der Krümmungskreise für die Scheitel benützt werden, daß die Zwischenteile mit dem Kurvenlineale leicht ergänzt werden können (Fig. 68). Für dieses Zwischenstück kann man auch den Krümmungskreis für jenen Punkt D benützen, der aus dem unter $\pi/_4$ gezogenen Strahle OD_1 hervorgeht (§ 16, 5).

3. Es sei wieder eine Ellipse $[O, a, b]$ gegeben. Wird der Strahl ON nach ON^0 in die große Achse gedreht (Fig. 72) und zieht man aus N^0 die Tangente an den Kreis $\left[M^0, \dfrac{a-b}{2}\right]$, welche $D_1^0 D_2^0$ als Durchmesser hat, so ist sie auch Tangente

an den Kreis $[O, a-b]$ im Punkte K^0, weil $ON^0 = 2 \times M^0N^0$ ist. Dreht man nun N^0K^0 zurück, bis $K^0K_2^0$ horizontal wird oder bis OK^0 nach OK parallel $K^0K_2^0$ kommt, so ist KN die Tangente des Kreises $[O, a-b]$, welche zu $K^0K_2^0$ senkrecht ist. Daraus ergibt sich offenbar jener Punkt D der Ellipse, für welchen die Normale DN den größten Abstand $(a-b)$ von O hat.

Dabei ist

$$D^0N^0 = DN = c \quad \text{und} \quad D^0K^0 = DK = d \cdot \sin(cd).$$

Nun ist $$D^0N^0 = D^0K^0;$$

daher folgt aus der Beziehung

$$cd \cdot \sin(cd) = ab, \quad \text{daß} \quad c = d \cdot \sin(cd) = \sqrt{ab}$$

ist. Es ist also (§ 16, 4) für diesen Punkt D der Ellipse der Krümmungsradius $k_D = c = \sqrt{ab}$ und K der Krümmungsmittelpunkt.

Sucht man das geometrische Mittel zwischen dem größten und kleinsten Krümmungsradius, so ergibt sich

$$\sqrt{k_A \cdot k_B} = \sqrt{\frac{b^2}{a} \cdot \frac{a^2}{b}} = \sqrt{ab}.$$

Der vorhin konstruierte Punkt D der Ellipse ist also ein Punkt mittlerer Krümmung und $DK = \sqrt{ab}$ der zugehörige Krümmungsradius. Zieht man in diesem Krümmungskreise $[K, \sqrt{ab}]$ die Halbmesser KP_1 und KP_2, welche zu den Achsen parallel sind, so schneiden die Geraden AP_1 und BP_2 den Kreis in den Punkten Q_1 und Q_2. Dann ergibt Q_1K auf der großen Achse einen Punkt R_1 und Q_2K auf der kleinen Achse einen Punkt R_2. Die Punkte R_1 und R_2 sind die Mittelpunkte von Kreisbogen AQ_1 und BQ_2, welche sich an den Bogen Q_1Q_2 des mittleren Krümmungskreises berührend anschließen. Den Krümmungsradius $k_D = \sqrt{ab}$ kann man auch unmittelbar finden, indem man bei A eine Normale zu a errichtet bis zum Schnitte S mit dem Kreise, der ON^0 als Durchmesser hat. Es ist dann $k_D = AS$.

4. Man kann auch Instrumente herstellen, welche das Zeichnen gewisser Linien ermöglichen.

α) Zum Zeichnen der Ellipse kann zunächst ein Fadenzirkel benützt werden. Er beruht auf der Brennpunktseigenschaft der Ellipse (§ 12, 2) und ist ein Zirkel mit

zylindrischen Schenkeln, an welchen je eine Hülse verschiebbar angebracht ist. An den Hülsen sind die Enden eines ungedrehten, wenig elastischen Fadens befestigt, der durch zwei bei den Spitzen der Schenkel angebrachte Löcher gezogen ist (Fig. 73). Durch passendes Verschieben der Hülsen kann der Zirkel so weit geöffnet werden, daß die zwischen den Spitzen liegende Fadenlänge der großen Achse einer zu zeichnenden Ellipse gleich wird. Dann setzt man die Zirkelspitzen auf die

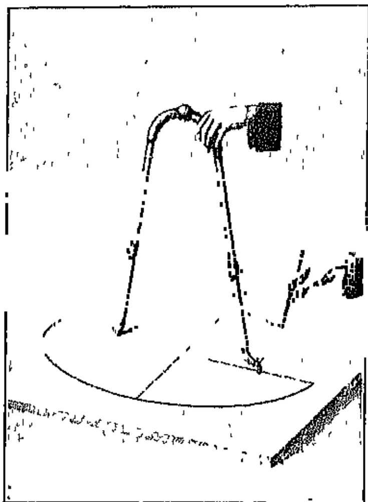


Fig. 73.

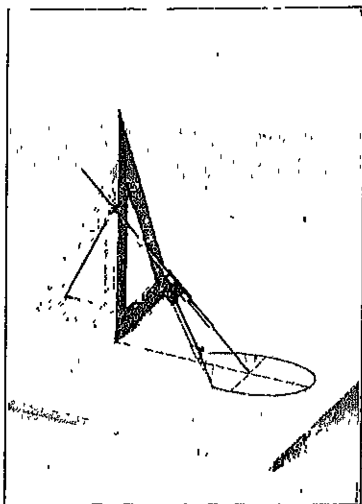


Fig. 74.

Brennpunkte der verlangten Ellipse, hängt den am Ende mit einem Öhr versehenen Stift (oder die Reißfeder) in den Faden ein und zeichnet — den Faden spannend — die halbe Ellipse. Nach einem Wechsel der Spitzen kann die andere Hälfte gezeichnet werden.[18]

β) Ein anderer Ellipsenzirkel beruht auf der Entstehung der Ellipse als ebener Schnitt eines Drehzylinders (§ 12, 5). Ein Metallstab ist mit einer leicht verschiebbaren Hülse versehen, an welcher der zweite Zirkelschenkel angebracht ist (Fig. 74). Dieser Schenkel wird so weit geöffnet, daß der Abstand der Spitze des Schenkels vom Metallstabe gleich der halben kleinen Achse b der verlangten Ellipse wird. Die Spitze bleibt dann bei jeder Verschiebung und Drehung

auf einem Drehzylinder mit dem Radius b. Die Spitze des Stabes wird auf den Mittelpunkt der Ellipse aufgesetzt. Dann bringt man den Metallstab in die Ebene, welche durch die große Achse der Ellipse geht und zur Zeichenebene normal ist, und zwar mit einer Neigung α, für welche tg $\alpha = b : c$ ist. Dies kann etwa dadurch herbeigeführt werden, daß man die Exzentrizität verdreifacht und im Endpunkte an einem aufgestellten rechtwinkligen Dreiecke die Höhe $3b$ festlegt. Die bewegliche Zirkelspitze beschreibt dann die verlangte Ellipse.[10]

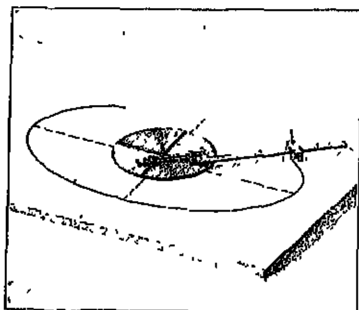


Fig. 75.

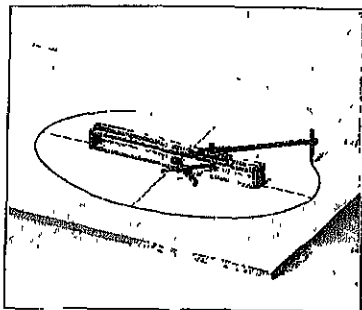


Fig. 76.

γ) Im § 15, 2 wurde gezeigt, daß die in der Fig. 59 vorkommenden Strecken EF und GH konstant sind, nämlich

$$EF = a - b \quad \text{und} \quad GH = a + b.$$

Geht man umgekehrt von der Strecke GH aus, welche sich so bewegt, daß G und H auf zwei zueinander senkrechten Geraden sich verschieben, errichtet bei G und H die Normalen, welche sich in N schneiden, zieht die zweite Diagonale ON des entstehenden Rechteckes, legt durch einen beliebigen Punkt D der Geraden GH die Parallelen DD_1 und DD_2 zu den Seiten des Rechteckes bis zu den Schnittpunkten mit ON, so muß für jede Lage der Strecke GH immer $D_1O = DG$ und $D_2O = DH$ sein, d. h. D_1 und D_2 müssen immer auf zwei konzentrischen Kreisen mit den Halbmessern OD_1, OD_2 liegen. Daraus folgt, daß D eine Ellipse beschreibt, welche aus diesen Kreisen [illegible] perspektive Affinitäten hervorgeht [illegible] DG und [illegible] DH ist.

Rückt der Punkt D nach dem Halbierungspunkt M der Strecke GH, so wird DG [illegible] DH [illegible]

„Der Halbierungspunkt M der Strecke GH beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius OM."

Hierauf beruhen zwei Formen von Ellipsographen. Beim einen (Fig. 75) werden zwei verstellbare Zapfen E, F eines Stabes mit Schiebern versehen, welche in den Schlitzen eines rechtwinkligen Führungskreuzes gleiten. Der bei D angebrachte Stift beschreibt dann die Ellipse $[O, DE, DF]$.

Beim anderen (Fig. 76) wird bloß F in dieser Weise geführt, während der Halbierungspunkt M der Strecke EF durch eine Kurbel OM auf einem Kreise geführt wird.[20]

§ 18. Abbildung und Beleuchtung des Kreises; ebene Schnitte einer Kugel.

1. Für einen Kreis sei der Grund- und Aufriß des Mittelpunktes O, die durch diesen gehende Horizontale h und Frontale f der Ebene sowie der Radius r gegeben (Fig. 77).

Im Aufrisse erhält man die Scheitel A_I'', A_{II}'' der großen Achse der Ellipse, indem man auf f'' unmittelbar den Kreishalbmesser r von O'' aus aufträgt. Die kleine Achse ergibt sich als Projektion des spurnormalen Durchmessers auf der zu f'' senkrechten Geraden m'', indem man etwa die durch m gehende, zur Aufrißebene normale Ebene als neue Projektionsebene (§ 9,4) umlegt. Ist P der Schnittpunkt von m mit der Koinzidenzgeraden k, so liegt O um den Abstand $P'f'$ vor P (bei Übersicht). Macht man $O''O^0 = P'f'$, so ist O^0P'' die Umlegung m^0, auf welche wieder der Radius nach $O^0B_I^0$ aufgetragen werden kann. Daraus erhält man dann die Scheitel B_I'', B_{II}'' der kleinen Achse.

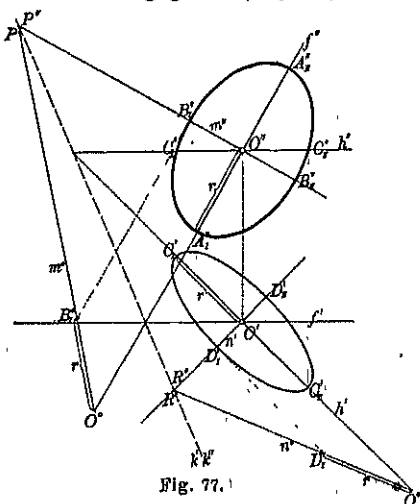


Fig. 77.

Für den **Grundriß** des Kreises ergibt sich die große Achse auf h', die kleine Achse auf der zu h' normalen Geraden n'. Ist jetzt R der Schnittpunkt von n mit der Geraden k und macht man $O'O^0 = R''h''$, so ist O^0R' die Umlegung n^0 der Spurnormalen n. Durch Auftragung von r nach $O^0D_I^0$ erhält man die kleine Achse $D_I'D_{II}'$.

Übungsaufgabe: Der Mittelpunkt O eines Kreises ist im Grund- und Aufrisse gegeben; ferner kennt man zwei konjugierte Durchmesser für den Grundriß des Kreises. Man soll den Aufriß des Kreises finden.

2. **Der Schlagschatten des Kreises auf eine Ebene ist eine Ellipse** (§ 15, 4). Der Schlagschatten des Punktes O ist der Mittelpunkt und der Schatten zweier normaler Durchmesser des Kreises bildet konjugierte Durchmesser der Ellipse. Es soll dies für einen besonderen Fall näher ausgeführt werden.

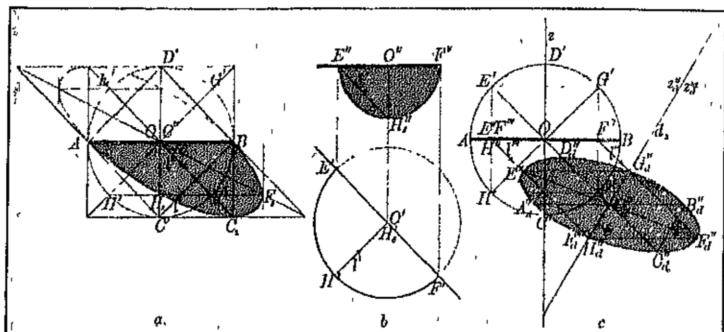


Fig. 78.

Horizontaler Kreis mit Diagonalbeleuchtung. Ein horizontaler Kreis $[O, r]$ erscheint im Aufrisse als horizontale Strecke $AB = 2r$.

a) Es soll der **Schlagschatten des vorderen Halbkreises auf die durch den Durchmesser AB gehende Aufrißebene** gesucht werden (Fig. 78a).

Die Kreisebene selbst kann man als Grundebene benützen. Nimmt man zunächst die normalen Durchmesser AB und CD, so ist AB sein eigener Schlagschatten. Legt man durch C den Lichtstrahl l, so erhält man den Schlagschatten C_2 im Eckpunkte eines Quadrates mit der Seite r. Der Affinitätstrahl $C'C_2$ ist zur Affinitätsachse AB parallel, also ist die Charakteristik $\delta = +1$. Für Diagonalbeleuchtung ist hier die Schlag-

schattenellipse mit dem umgelegten Kreise äquivalent affin ($f_k = f_e$). Für die Schlagschattenellipse sind $OB = r$ und $OC_3 = r\sqrt{2}$ konjugierte Halbmesser; sie schließen den Winkel $\pi/_4$ ein. Für B ist $\lambda = \sqrt{2}$, $\varphi = 1$, der Krümmungsradius $k = 2r\sqrt{2}$, also der Krümmungsmittelpunkt im Schnittpunkte von BC' mit der Kreistangente für A. Für C_3 ist $\lambda = 1$, $k = r$ und B schon der Krümmungsmittelpunkt.

Sucht man noch den Schatten der Durchmesser EF und GH, so liegt H_2F_2 mit $H'F'$ auf derselben Horizontalen, so daß H_2 auf dem Ordner des Punktes O sich befindet und $H_2F_2 = H'F'$ ist. Nun sind $OH_2 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ und $OF_2 = \frac{r}{2}\sqrt{10}$ wieder konjugierte Halbmesser der Schattenellipse; für ihren eingeschlossenen Winkel ist $\operatorname{tg} F_2OH_2 = 2$.

β) Es soll der Schlagschatten eines Halbkreises auf eine Ebene gesucht werden, welche im positiven Oktanten unter $\pi/_4$ durch die z-Achse geht [bei Baubestandteilen heißen solche Ebenen Gehrungsebenen] (Fig. 78b). Der Schlagschatten ist eine Ellipse, für welche OF und OH_s die Halbachsen sind. Es ist

$$a = r, \quad b = \frac{r}{2}\sqrt{2}, \quad c = \frac{r}{2}\sqrt{2}, \quad \text{also } b = c.$$

Der Schlagschatten des Kreises auf die erwähnte Gehrungsebene ist eine gleichseitige Ellipse.

Im Aufrisse ist $O''F''$ normal und gleich $O''H_s''$; daher ist der Aufriß dieser gleichseitigen Ellipse ein Kreis mit dem Radius $r_s = \frac{r}{2}\sqrt{2}$.

γ) Es soll der Schlagschatten eines Kreises auf eine zur Kreuzrißebene senkrechte Ebene [Dachebene] gesucht werden (Fig. 78c).

Die zur Kreuzrißebene senkrechte Dachebene habe eine Kreuzrißspur d_3, wobei die z-Achse durch den Mittelpunkt O des Kreises gehen soll und ein Kreuzriß von rechts vorausgesetzt sein mag, so daß l''' parallel zu l'' wird. Es ist dann die durch die z-Achse gehende Lichtstrahlebene eine Koinzidenzebene für Aufriß und Kreuzriß. Da nun der Schlagschatten z_d der z-Achse auf die Dachebene im Kreuzrisse als $z_d''' = d_3$ erscheint, so ist d_3 auch zugleich z_d''. Zieht man durch

O die Parallele zu l'', so ergibt sich der Aufriß O_d'' des Schlagschattens des Mittelpunktes O auf die Dachebene. Der Schatten des Durchmessers AB ist eine gleiche und parallele Strecke $A_d''B_d''$. Der Durchmesser GH liegt auf der erwähnten Koinzidenzebene und hat daher seinen Schatten $G_d''H_d''$ auf z_d''. Die zu GH parallelen Sehnen AD und BC haben also Schlagschatten $A_d''D_d''$ und $B_d''C_d''$, welche zu z_d'' parallel sein müssen. Dann sind $A_d''B_d''$ und $C_d''D_d''$ konjugierte Durchmesser der Schattenellipse. Der zu $G_d''H_d''$ konjugierte Durchmesser $E_d''F_d''$ ergibt sich dadurch, daß die Sehnen GE und HF Schatten haben, welche zu AB parallel sind. Dabei ist H_d'' auch zugleich F_d''', weil der ganze Schlagschatten im Kreuzrisse auf d_3 erscheint und die beiden Projektionen auf einem horizontalen Ordner liegen müssen. Das Dreieck $G_d''F_d''H_d''$ enthält den Neigungswinkel ε_1 der Dachebene gegen die Grundebene und anderseits den Winkel $\pi/_4$. Für $\varepsilon_1 = 3\,\pi/_8$ wird es gleichschenklig und man erhält in diesem Falle die Achsen der Ellipse.

Übungsaufgabe: Drei Punkte sind durch Aufriß und Kreuzriß gegeben. Es ist der Aufriß einer Ellipse zu suchen, welche durch die drei Punkte geht und im Kreuzrisse als Kreis erscheint.

3. Eine Kugel $[O, r]$ sei im Grund- und Aufrisse gegeben. Eine Ebene ε schneidet die Ebene des horizontalen Umrißkreises in einer Geraden h und die Ebene des zur Aufrißebene parallelen Umrißkreises in der Geraden f. Dabei muß der Schnittpunkt von h' und y' mit jenem von f'' und y'' auf einem Ordner liegen (Fig. 79).

Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist bekanntlich ein Kreis.

Um den Aufriß des Schnittkreises der Ebene zu finden, denkt man sich die durch O normal zu f gehende Ebene auf die Ebene des Umrißkreises umgelegt, wobei der Umrißkreis der Kugel derselbe bleibt. Die Senkrechte m'' von O'' zu f'' ist schon der Aufriß des spurnormalen Durchmessers des Schnittkreises. Die Spur e_0 der Ebene ε auf der neuen Projektionsebene geht durch den Schnittpunkt E'' von m'' und f'', anderseits durch die neue Projektion P^0 des Punktes P von m, für welchen $P'' = O''$ ist. Es ist also $P''P^0 = O'P'$ zu machen. Der Schnittkreis erscheint auf e_0 als Sehne $B_I^0B_{II}^0$. Durch Halbieren ergibt sich der Radius M^0B^0. N[illegible] man den Mittelpunkt M'', [illegible] Achse [illegible] und durch Übertragung von M^0B^0 [illegible]

für den Aufriß des Schnittkreises. Der Kreis wird bei den Schnittpunkten R, S der Frontalen f und des Umrißkreises unsichtbar. Die Ellipse muß den scheinbaren Umriß bei R'' und S'' berühren. Die Tangentialebenen der Kugel für R und S sind nämlich projizierende Ebenen, weshalb die Projektion der Tangente des Schnittkreises mit der Tangente des Umrißkreises zusammenfällt.

Für den Grundriß des Schnittkreises wäre das Analoge zu machen, nämlich man legt die durch O normal zu h gehende Ebene auf die Ebene des Umrißkreises um usw.

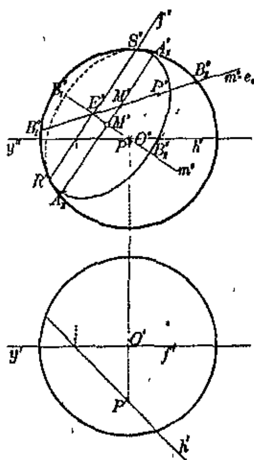


Fig. 79.

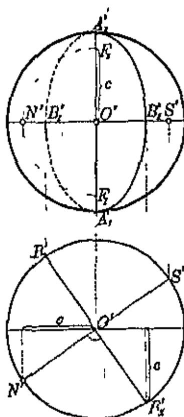


Fig. 80.

Geht die Ebene durch den Mittelpunkt O der Kugel, so heißt die Schnittlinie ein Großkreis. Der Großkreis, dessen Ebene zu ε parallel ist, erscheint als Ellipse, welche den zu f'' parallelen Durchmesser des Umrißkreises als große Achse besitzt und welche in diesen Scheiteln den Umrißkreis berührt. Die kleine Achse erhält man aus dem zu $B_I^0 B_{II}^0$ parallelen Durchmesser des Umrißkreises.

Es sei ein Großkreis gedacht (Fig. 80), dessen Ebene zur Grundebene normal ist und der als Durchmesser $B_I' B_{II}'$ erscheint. Im Aufrisse [illegible] als Ellipse mit den Achsen [illegible] $B_I B_{II}$ [illegible] $F_I = c$, welche dem Abstand [illegible] B_I [illegible] O [illegible] ist (§ 13, 2). Zieht

man nun den zu diesem Großkreise senkrechten Durchmesser NS der Kugel, so folgt aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke, welche $O'B'_{II}$ und $O'N'$ als gleiche Hypotenusen besitzen, daß $O''N'' = O''S'' = c$ ist. Die Punkte N, S kann man die Polpunkte des Kreises $[O, r]$ nennen. Die Punkte, welche auf der kleinen Achse einer Ellipse im selben Abstande c vom Mittelpunkte O wie die Brennpunkte dieser Ellipse liegen, nennt man die Antibrennpunkte der Ellipse.

Die Normalrisse der Polpunkte eines Kreises sind die Antibrennpunkte der Ellipse, welche den Normalriß des Kreises bildet.

Wenn zwei Großkreise zueinander normal sind, so geht die Orthogonalprojektion des einen durch die Antibrennpunkte der Orthogonalprojektion des anderen.

Übungsaufgaben: 1. Der Großkreis, welcher durch zwei Punkte S, T einer Kugel bestimmt ist, soll abgebildet werden.

2. Der Aufriß eines Gradnetzes einer Kugel — eines verkleinerten Abbildes der Erde — soll konstruiert werden, wenn die Achse NS zur Kreuzrißebene parallel ist und eine Polhöhe $\beta = \pi/_3$ vorausgesetzt ist. Für die Aufrisse der Meridiane liegen die Antibrennpunkte auf dem Aufrisse des Äquators. Die Brennpunkte selbst liegen daher auf einer Ellipse, welche gegen den Aufriß des Äquators um $\pi/_2$ gedreht ist (N'', S'' als Brennpunkte hat).

3. Eine Ellipse, von welcher der Scheitelkreis $[O, a]$ und zwei Punkte S, T gegeben sind, ist zu konstruieren.

4. Eine Ellipse, von welcher der Scheitelkreis $[O, a]$ und ein Punkt T mit der zugehörigen Tangente t gegeben sind, ist zu konstruieren.

5. Eine Ellipse soll einen gegebenen Kreis doppelt berühren und überdies durch drei innerhalb des Kreises liegende Punkte A, B, C gehen.

6. Von einer Ellipse ist der Mittelpunkt, eine Tangente und ein doppelt berührender Kreis gegeben [2 Lösungen].[21]

7. Durch einen Punkt T einer Kugel ist ein Großkreis zu legen, dessen Tangente für T einen gegebenen Einfallswinkel ε gegen die Grundebene besitzt, oder dessen Ebene mit der Grundebene den Neigungswinkel ε bildet.

§ 19. Das sphärische Dreieck.

„Zwei Punkte A und C einer Kugel, welche nicht diametral liegen, bestimmen einen Großkreis.“

Der kleinere Bogen $AC = b$ dieses Großkreises ist die kürzeste Verbindungslinie der Punkte A und C auf der Kugel (geodätische Linie).

Es spielt also der Großkreis auf der Kugel eine ähnliche Rolle wie die Gerade in der Ebene.

Ein dritter Punkt B der Kugel bestimmt mit A den kleineren Bogen $BA = c$ eines Großkreises und ebenso mit C den kleineren Bogen $BC = a$ eines anderen Großkreises. Der durch die drei sphärischen Strecken a, b, c begrenzte Teil der Kugel heißt ein gewöhnliches sphärisches Dreieck (Eulersches Dreieck).

Für die Seiten a, b, c und die Winkel A, B, C eines gewöhnlichen sphärischen Dreieckes ist

$$0 < a,\quad b,\quad c < \pi, \qquad 0 < A,\quad B,\quad C < \pi;$$
$$0 < (a+b+c) < 2\pi, \qquad \pi < (A+B+C) < 3\pi.$$

Hier werden sowohl die Seiten als auch die Winkel nach dem Bogenmaße gemessen; es herrscht daher auf der Kugel auch in bezug auf die Maßgrößen vollkommene Dualität.[5]

Es gibt hier sechs Grundaufgaben, welche sich paarweise (dual) gegenüberstehen, nämlich das gewöhnliche sphärische Dreieck ist bestimmt durch:

1. die drei Seiten $[a, b, c]$,
2. die drei Winkel $[A, B, C]$,
3. zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel $[a, b, C]$,
4. zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite $[A, B, c]$,
5. zwei Seiten und einen gegenüberliegenden Winkel $[a, c, A]$,
6. zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite $[A, C, a]$.

Es sollen dann die drei fehlenden Größen gefunden und das sphärische Dreieck selbst abgebildet werden. Die Aufgaben können leicht gelöst werden, wenn eine Seite, z. B. b, auf der Grundebene liegt oder wenn ein Winkel, z. B. B, auf der Grundebene liegt (wenn also die Kugel in B die Grundebene berührt).

1. Es sei

$$a = 45^0,\quad b = 60^0,\quad c = 50^0.$$

Man nimmt auf der Grundebene die Seite b an, reiht die Umlegungen $a^\times$, $c^\times$ der beiden anderen Seiten an und zeichnet

2. Es sei

$$A = 60^0,\quad B = 75^0,\quad C = 67\tfrac{1}{2}^0.$$

Man nimmt auf der Grundebene den Winkel B an. Sein Scheitel ist zugleich der Grundriß O' des Kugelmittel-

den Umrißkreis $[O, r]$ der Kugel (Fig. 81). Dann sind A und C schon zwei Eckpunkte des sphärischen Dreieckes. Die Normale von $B_c^\times$ zu OA und die Normale von $B_a^\times$ zu OC schneiden sich im Grundrisse B' des dritten Eckpunktes und OB' ist der Grundriß der zugehörigen Kante. Errichtet man in B' die Senkrechte zu OB' bis zum Schnittpunkte B^0 mit dem Umrißkreise $[O, r]$, so erhält man die Höhe $B'B^0$ des Kugelpunktes über der Grundebene. Dreht man die Punkte E, F nach $E^\times, F^\times$, so ergeben sich durch die Verbindungsgeraden $B^0E^\times$ und $B^0F^\times$ die Winkel A und C. Der Großkreis, auf welchem die Seite c liegt, erscheint als Ellipse,

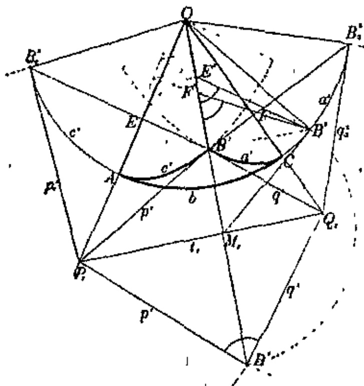


Fig. 81.

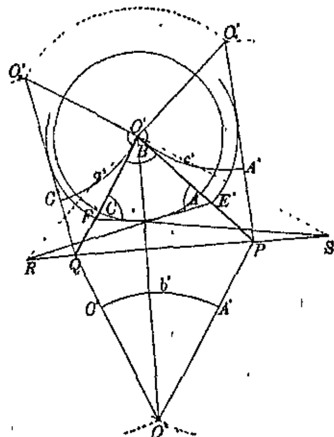


Fig. 82.

punktes (Fig. 82). Nun sei B selbst der Mittelpunkt einer Hilfskugel, für welche der Umrißkreis gezeichnet ist. Die Senkrechte BR zur Ebene der Seite c sei die Achse eines Drehkegels, welcher diese Kugel berührt, und zwar so, daß die Umrißerzeugende $RE^\times$ mit $BE^\times$ den Winkel A bildet. Ebenso sei die Senkrechte BS zur Ebene der Seite a die Achse eines Drehkegels, der ebenfalls jene Kugel berührt, und zwar so, daß die Umrißerzeugende $SF^\times$ mit $BF^\times$ den Winkel C bildet. Als Berührungskegel derselben Kugel haben diese Kegel zwei gemeinsame Tangentialebenen, welche durch die Verbindungsgerade der Spitzen RS gehen, und welche mit den gegebenen Seiten-

welche OA als halbe große Achse hat; die halbe kleine Achse erhält man durch Auftragen von r auf $B^0E^\times$. Hieraus kann der Grundriß c' der Seite c gezeichnet werden. In analoger Weise findet man a'. Um den dritten Winkel B zu erhalten, legt man die Tangentialebene des Punktes B um. Die Tangente bei B^0 gibt den Punkt M_1, in welchem die Spur t_1 senkrecht zu OB' ist, oder die Tangenten $p_c^\times$ und $q_a^\times$ geben die Punkte P_1, Q_1, deren Verbindungsgerade auch t_1 ist. Früher (§ 11, 3) wurde schon erwähnt, daß t_1 die Polare von B' in bezug auf den Umrißkreis ist. Die Umlegung $B^\times$ erhält man dann durch den Halbmesser M_1B^0 oder durch die zwei Strecken $P_1B_c^\times$, $Q_1B_a^\times$.

Die Strecken $OB_c^\times$ und $OB_a^\times$ beschreiben bei den Drehungen Kegel, welche sich in zwei zur Grundebene symmetrisch liegenden Erzeugenden OB schneiden. Es ergeben sich also zwei symmetrische sphärische Dreiecke, welche wohl dieselben Seiten und Winkel aufweisen, aber nicht zur Deckung gebracht werden können.

Die Schnitterzeugenden sind nur reell, wenn

[illegible]

ist. Man erhält vier Schnitterzeugende, wenn auch [illegible]

ebenen die verlangten Winkel A und C bilden. Die Gerade RS schneidet die Seitenebenen in den Punkten Q, P. Legt man diese Ebenen um, so kommt O auf die Senkrechten bei B zu BQ und BP. Zieht man aus Q die Tangente an den umgelegten Basiskreis mit dem Mittelpunkte B und dem Radius $BF^\times$, so ergibt sich die Umlegung $O_a^\times$. Durch die Tangente aus P an den umgelegten Basiskreis $[B, BE^\times]$ erhält man die Umlegung $O_c^\times$. Zur Probe muß $O'O_a^\times = O'O_c^\times$ sein. Jetzt hat man die zwei Seiten $a^\times$ und $c^\times$ bereits gefunden. Die dritte Seite $b^\times$ ergibt sich durch Umlegung des Dreieckes POQ, nämlich durch Übertragen der Strecken $PO_c^\times$ und $QO_a^\times$ nach $PO^\times$ und $QO^\times$, oder durch die Spurnormale.

Die zwei zur Grundebene symmetrischen Berührungsebenen der Hilfskugel ergeben auch zwei symmetrische sphärische Dreiecke, welche dieselben Seiten und Winkel aufweisen, aber nicht zur Deckung gebracht werden können. [Das Dreieck BPQ ist die gnomonische Projektion (II. Bd., § 60, 3) der beiden sphärischen Dreiecke.]

Die Berührungsebenen sind nur reell, wenn

[illegible] $> (\pi - B) > (A - C)$

ist. Im gegenteiligen Falle schneidet nämlich RS die

$(a+c)>(\pi-b)$ ist; dann führen aber zwei solche Erzeugende zu sphärischen Dreiecken, welche statt einer der gegebenen Seiten das Supplement enthalten.

Hiermit ist auch eine früher (§ 7, 3) erwähnte Aufgabe gelöst. Sind nämlich OA, OB die Spuren e_1 und f_1 zweier Ebenen und OB die Schnittgerade der Ebenen, so ist bei $B^\times$ die wahre Größe des Neigungswinkels der Ebenen gefunden.

Hilfskugel in reellen Punkten, und dann sind die Berührungsebenen aus RS imaginär.

Man kann die Aufgabe auch so aussprechen: „Es soll eine Ebene gefunden werden, welche mit zwei gegebenen Ebenen (die zur Grundebene normal sind) bestimmte Neigungswinkel bildet."

Aus Fig. 81 kann man unmittelbar die Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie ablesen:

$$BB' = r \cdot \sin a \sin C = r \cdot \sin c \sin A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin B} \ldots \text{Sinussatz.}$$

$$OE = OF \cdot \cos b + FB' \cdot \sin b$$

$$r \cdot \cos c = r \cos a \cdot \cos b + r \sin a \cos C \cdot \sin b$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cdot \cos C \ldots \text{Cosinussatz.}$$

3. Wenn $[a, b, C]$ gegeben ist, so ist im wesentlichen dieselbe Figur in anderer Reihenfolge zu konstruieren.

$[b, a^\times, F(C), B', B_c^\times, E^\times, P_1, Q_1, B^\times.]$

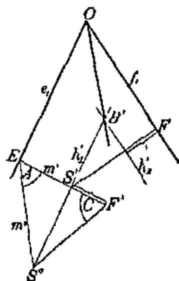


Fig. 83.

4. Wenn $[A, B, c]$ gegeben ist, so wäre auch wieder die obige Figur in anderer Reihenfolge herzustellen.

$[B, O_c^\times, c^\times, P, E^\times, A, R, Q, S, F^\times, O_a^\times, O^\times.]$

Die Figur wäre auch für den Fall $[a, b, c]$ oder $[a, c, B]$ verwendbar.

Wenn $[A, C, b]$ gegeben ist und die Seite b auf der Grundebene liegt, so ist die Lösung auch sehr einfach (Fig. 83). Die Spuren e_1, f_1 der beiden Seitenebenen schließen die Seite b ein. In einem beliebigen Punkte E von e_1 wird

eine Spurnormale m gezeichnet, so daß m' und m^0 den gegebenen Winkel A bilden. Eine Horizontale h_I der Ebene ergibt S', S^0. Das rechtwinklige Dreieck $S^0 S' F^\times$ mit dem Winkel C liefert den Abstand für h'_{II} von f_1. Die beiden Horizontalen h_I und h_{II} der Ebenen ergeben einen Punkt B der Schnittgeraden.

Für den besonderen Fall, daß $A = C$ ist, wird OB' die Halbierungsgerade des Winkels der Spuren e_1, f_1.

5. Es sei

$$a = 40^\circ,\quad c = 50^\circ,\quad A = 55^\circ.$$

Zunächst kann (Fig. 84) die Umlegung $c^\times$ der Seite c gezeichnet und dann durch Auftragen des Winkels A bei E der Punkt B gefunden werden

6. Es sei

$$A = 67\tfrac{1}{2}^\circ\ (52\tfrac{1}{2}),\quad C = 60^\circ,\quad a = 45^\circ.$$

Zunächst kann (Fig. 85) die Umlegung $a^\times$ der Seite a auf die Grundebene gezeichnet und dann durch Auftragen des Winkels C bei F der

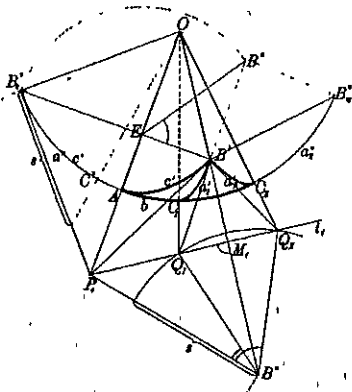


Fig. 84.

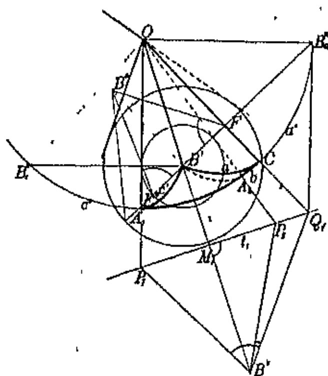


Fig. 85

Die Senkrechte von P_1 zu OB' ist die Spur t_1 der Tangentialebene für B. Die Kante OC liegt auf einem Drehkegel, welcher OB als Achse besitzt. Auf der Tangentialebene hat dieser Kegel einen Basiskreis mit dem Mittelpunkte B und einem Radius s, den man durch Antragen der Seite $a^\times$ bei $OB_c^\times$ findet. Der Kreis mit dem Mittelpunkte $B^\times$ und dem Radius s schneidet die Spur t_1 in zwei Punkten Q_I und Q_{II}, aus welchen sich die Schnitterzeugenden des Kegels mit der Grundebene und sohin im allgemeinen zwei mögliche Eckpunkte C_I, C_{II} ergeben.

Wenn $s > BP_1$ ist, so wird der Punkt C_I unbrauchbar, da das zugehörige Dreieck entweder nicht die Seite a oder nicht den Winkel A (sondern das Supplement) enthält.

Wenn $s < BM_1$ ist, so werden die Eckpunkte C_I und C_{II} imaginär.

Eine genauere Diskussion, bei welcher $A \lesseqgtr \pi/_2$ und $c \lesseqgtr \pi/_2$ vorausgesetzt wird, zeigt:

„Das sphärische Dreieck ist durch zwei Seiten a, c und den gegenüberliegenden Win-

Punkt B' gefunden werden. Die Senkrechte von Q_1 zu OB' ist wieder die Spur t_1 der Berührungsebene für B. Zieht man durch B^0 eine Gerade, welche mit der Verlängerung von FB' den Winkel A bildet, so ist der Kreis $[B', B'E^0]$ die Basis eines Drehkegels, dessen Berührungsebenen durch B gehen und mit der Grundebene einen Neigungswinkel A bilden. Durch die Kante OB gehen zwei Tangentialebenen an diesen Kegel, deren Spuren die Tangenten OP_I und OP_{II} an den Basiskreis sind. Daraus ergeben sich im allgemeinen zwei mögliche Eckpunkte A_I, A_{II}.

Dabei ist die eine Kante OA_I nach abwärts gerichtet, während OA_{II} in die Verlängerung der Tangente nach aufwärts fällt. In dem angenommenen Beispiele wird aber der Punkt A_{II} unbrauchbar, weil das Dreieck $A_{II}BC$ nicht den Winkel A, sondern das Supplement enthält. Wenn der Radius $B'E^0 > B'O$ ist, so werden die Tangenten, also auch die Eckpunkte A_I und A_{II} imaginär.

Eine genauere Diskussion, bei welcher $a \lesseqgtr \pi/_2$ und $C \lesseqgtr \pi/_2$ vorausgesetzt wird, zeigt:

„Das sphärische Dreieck ist durch zwei Winkel A, C und die gegenüberliegende

kel A nur dann eindeutig bestimmt, wenn a zwischen c und $(\pi - c)$ ist, sonst ergeben sich zwei gewöhnliche Dreiecke oder zwei solche, bei welchen b und B überstumpf sind, oder zwei solche, bei welchen der Eckpunkt C imaginär ist.“

Seite a nur dann eindeutig bestimmt, wenn A zwischen C und $(\pi - C)$ ist; sonst ergeben sich zwei gewöhnliche Dreiecke oder zwei solche, bei welchen B und b überstumpf sind, oder zwei solche, bei welchen der Eckpunkt A imaginär ist.“[22]

Übungsaufgaben: 1. Für ein sphärisches Dreieck ist die Summe zweier Seiten $(a+b)$, die dritte Seite c und der gegenüberliegende Winkel C gegeben. Besonderer Fall: $C = \pi/_2$.

2 Die Summe der drei Seiten $(a+b+c)$ und die zwei Winkel A und C sind gegeben.

3. Man soll für ein sphärisches Dreieck die Höhen (den Höhenschnittpunkt), den umschriebenen Kreis und den eingeschriebenen Kreis konstruieren.

4 Der Scheitel eines Winkels c ist gegeben durch O'', O'. Die Schenkel des Winkels schließen mit der Vertikalen z die Winkel a und b ein. Wie groß ist die Projektion C des Winkels? — Reduktion eines Winkels auf den Horizont. — Umgekehrt: Man soll aus der Projektion den Winkel im Raume finden.

5. Es ist die geographische Länge λ und die geographische Breite β für zwei Orte der Erde (Mittelpunkt O, Erdachse z, Nullmeridian in der Aufrißebene) gegeben. Man soll den Aufriß und die wahre Größe des kürzesten Verbindungsweges finden.

6. Es ist eine Ebene gegeben (Spur e_1, Neigungswinkel $\varepsilon_1 = \pi/_3$). Auf der Ebene liegt ein Winkel $S = \pi/_4$. Die Spuren R_1 und T_1 der beiden Schenkel sind gegeben und die Projektion des Winkels soll $S' = (\pi/_4 + \pi/_8)$ sein $[b, B, h_b]$ (Hilfskugel durch zwei Kreise).

7. Es sind Gerade zu finden, welche gegen die Grundebene den Einfallswinkel ε_1 und gegen die Aufrißebene den Einfallswinkel ε_2 aufweisen $[a = \pi/_2,\ b = \varepsilon_1,\ c = \varepsilon_2]$ (alle 4 Lösungen sind brauchbar).

8. Es sind Ebenen zu suchen, welche gegen Grund- und Aufrißebene die Neigungswinkel A und C aufweisen.

9. Es sind Gerade gesucht, welche zwei windschiefe Gerade s, t unter den Winkeln a und c schneiden.

§ 20. Ebene Schnitte eines aufrechten Kreiskegels.

1. Ein aufrechter Kreiskegel (Drehkegel), dessen Achse vertikal ist und mit den Erzeugenden den Winkel β bildet, ferner eine zur Aufrißebene normale Ebene ε, welche mit der Kegelachse den Winkel α bildet, seien gegeben. Die Schnittlinie des Kegels mit der Ebene soll untersucht werden.

Es sind da die drei augenscheinlich verschiedenen Fälle zu unterscheiden:

$\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$.

Die zugehörigen Kegelschnitte heißen:

Ellipse, Parabel, Hyperbel.

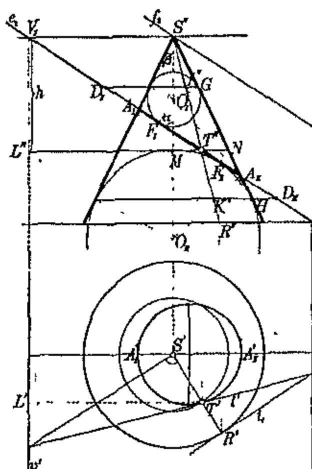


Fig. 86.

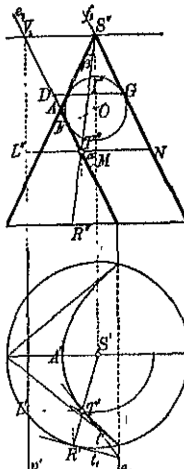


Fig. 87.

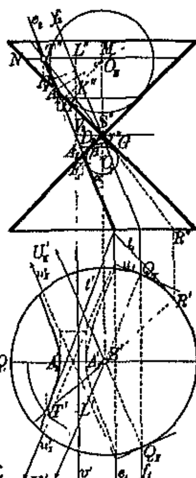


Fig. 88.

2. Ein beliebiger Punkt T der Schnittlinie ergibt sich als Schnittpunkt einer Kegelerzeugenden SR mit der Ebene ε; seine Projektionen sind T'' (auf der Spur e_2 der Ebene ε) und T' (auf dem Grundrisse des Kreises mit dem Radius MN).

Die Ebene, welche durch die Kegelachse normal zur Ebene ε geht, ist eine Symmetrieebene für beide Gebilde. Sie schneidet den Kegel in zwei Erzeugenden (in den Figuren sind es die Umrißerzeugenden), auf welchen sich die Schnittpunkte A_I und A_{II} ergeben. Im zweiten Falle ist die eine Erzeugende zur Ebene ε parallel, daher rückt der eine Schnittpunkt ins Unendliche.

Die Orthogonalprojektion der Kegelachse auf die schneidende Ebene ist eine Symmetrieachse des Kegelschnittes. Auf ihr liegen zwei Scheitel A_I, A_{II}; bei der Parabel ist nur **ein** Scheitel A vorhanden, der andere ist uneigentlich.

Der Aufriß des Kegelschnittes ist im ersten Falle die Strecke $A_I A_{II}$ auf e_2, im zweiten Falle reicht er von A bis ins Unendliche, im dritten Falle ist er die Nebenstrecke von $A_I A_{II}$. Die Ebene schneidet da in beide Teile des Kegels ein, die Hyperbel hat zwei Äste.

Unter den Kugeln, welche den Drehkegel längs eines Parallelkreises berühren, gibt es zwei, welche auch die gegebene Ebene berühren. Ihre scheinbaren Umrisse sind bei der vorliegenden Annahme die Kreise, welche die Spur e_2 der Ebene und die Umrißerzeugenden des Kegels berühren. Ihre Mittelpunkte O_I, O_{II} ergeben sich auf der Kegelachse durch Halbieren der Winkel bei A_I und A_{II}. Die Kugeln berühren die Ebene in den Fußpunkten F_I und F_{II} der Normalen aus O_I und O_{II} auf die Ebene ε, ferner den Kegel in zwei Kreisen, welche von den Fußpunkten G und H der Normalen aus O_I und O_{II} auf die Umrißerzeugende beschrieben werden. Die Erzeugende SR trifft diese beiden Kreise in den Punkten J und K. Im zweiten Falle rücken wieder O_{II}, F_{II}, H und K ins Unendliche.

Nun ist nach einem früher (§ 12, 2) erwähnten Satze

im ersten Falle:

$$\left.\begin{aligned} TF_I &= TJ \\ TF_{II} &= TK \end{aligned}\right\} +$$

$$TF_I + TF_{II} = JK = GH$$

Insbesondere ist für die beiden Scheitel A_I und A_{II}

$$A_I F_I + A_I F_{II} = GH,$$
$$A_{II} F_I + A_{II} F_{II} = GH.$$

Durch Addition ergibt sich:

$$A_I A_{II} + A_I A_{II} = 2 \times GH,$$

also

$$A_I A_{II} = GH$$

und $TF_I + TF_{II} = A_I A_{II}$.

im dritten Falle:

$$\left.\begin{aligned} TF_I &= TJ \\ TF_{II} &= TK \end{aligned}\right\} -$$

$$TF_I - TF_{II} = JK = GH.\text{*)}$$

$$A_I F_I - A_I F_{II} = -GH,$$
$$A_{II} F_I - A_{II} F_{II} = GH.$$

Durch Subtraktion der oberen Gleichung erhält man:

$$A_I A_{II} + A_I A_{II} = 2 \times GH,$$

also

$$A_I A_{II} = GH$$

und $TF_I - TF_{II} = A_I A_{II}$.

Dabei ist

$$A_I A_{II} = GH = O_I O_{II} \cdot \cos \beta,$$
$$F_I F_{II} = O_I O_{II} \cdot \cos \alpha.$$

*) Für den anderen Ast der Hyperbel ist zu setzen $[-GH]$.

Die Punkte F_I, F_{II} heißen die Brennpunkte und die Strecken TF_I und TF_{II} die Leitstrahlen des Kegelschnittes.

Für jeden Punkt einer Ellipse ist die Summe der Leitstrahlen gleich der großen Achse.

Für jeden Punkt einer Hyperbel ist die Differenz der Leitstrahlen gleich der reellen Achse.

Eine beliebige dem Kegel eingeschriebene Kugel mit dem Mittelpunkte O ist mit den beiden die Ebene berührenden Kugeln perspektiv ähnlich, wobei die Spitze S das Ähnlichkeitszentrum ist. Zieht man in dieser Kugel den Durchmesser $E_I E_{II}$, welcher zur Ebene ε normal ist, so ist OE_I gleichsinnig parallel zu $O_I F_I$ und OE_{II} gleichsinnig parallel zu $O_{II} F_{II}$; daher liegen die Punkte E_I, F_I und ebenso E_{II}, F_{II} auf Strahlen aus S. Man kann also die Brennpunkte F_I und F_{II} auch aus einer beliebigen eingeschriebenen Kugel erhalten, indem man die Endpunkte E_I, E_{II} des zur Ebene normalen Kugeldurchmessers aus S auf die Ebene projiziert.

3. Die Tangente t der Schnittlinie ist die Schnittgerade der Tangentialebene τ des Kegels längs der Erzeugenden SR mit der Ebene ε. Die Spur t_1 der Tangentialebene trifft die Spur e_1 der Ebene ε in einem Punkte, der mit T verbunden die Tangente t liefert. Nach einem früher (§ 12, 3) erwähnten Satze ist

$$\sphericalangle TF_I t = \sphericalangle TJt \quad \text{und} \quad \sphericalangle TF_{II} t = \sphericalangle TKt.$$

Nun ist aber $\sphericalangle TJt = \sphericalangle TKt$,

und zwar im ersten Falle als Scheitelwinkel und im dritten Falle als derselbe Winkel.

Es ist also auch $\sphericalangle TF_I t = \sphericalangle TF_{II} t$.

Die Tangente der Ellipse halbiert den Nebenwinkel der Leitstrahlen des Berührungspunktes*).

Die Tangente der Hyperbel halbiert den Winkel der Leitstrahlen des Berührungspunktes.

*) Nach dieser Eigenschaft werden Licht- und Wärmestrahlen, welche von F_I ausgehen, durch Spiegelung an der Ellipse in F_{II} wieder vereinigt, wodurch an dieser Stelle die Entzündung eines Brennstoffes herbeigeführt werden kann. Dies rechtfertigt bei der Ellipse und auch bei der Parabel den Ausdruck „Brennpunkt". Bei der Hyperbel würde nur für konvergente Strahlen etwas Ähnliches eintreten.

Für die Parabel ist zu beachten, daß der zweite Leitstrahl immer zur Achse parallel ist.

Dreht man den Punkt A_I auf die andere Umrißerzeugende nach A_I^0, so liegen die Punkte A_I^0 und A_{II} bei der Ellipse von G und H um $A_I F_I$ und $A_{II} F_{II}$ nach einwärts, bei der Hyperbel nach auswärts. Die Strecke $A_I^0 A_{II}$ ist also der doppelten Exzentrizität $2c$ des Kegelschnittes gleich. Zwischen den Berührungskreisen liegt auf jeder Erzeugenden die Strecke $2a$, zwischen den Scheitelparallelkreisen die Strecke $2c$.

4. Die Ebene ε wird von den Ebenen der beiden Berührungskreise in Geraden d_I und d_{II} geschnitten, welche im Aufrisse als Punkte D_I und D_{II} erscheinen. Diese Geraden heißen die Leitgeraden (Direktrix). Der Abstand eines Punktes T des Kegelschnittes von der einen Geraden d_I erscheint als $T''D_I$ in wahrer Größe.

Nun ist $$TF_I = TJ = NG$$
und $$Td_I = T''D_I.$$

Aus der Figur folgt unter Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck $D_I G A_{II}$

$$\frac{TF_I}{Td_I} = \frac{NG}{T''D_I} = \frac{A_{II}G}{A_{II}D_I} = \frac{\sin D_I}{\sin G},$$

$$\frac{TF_I}{Td_I} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{F_I F_{II}}{A_I A_{II}} = \frac{c}{a}.$$

Für $$\alpha \gtreqless \beta \quad \text{ist} \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \lesseqgtr 1.$$

Für jeden Punkt T eines Kegelschnittes ist das Verhältnis des Abstandes von einem Brennpunkte zum Abstande von der zugehörigen Leitgeraden konstant, und zwar bei der Ellipse kleiner als 1, bei der Parabel gleich 1 und bei der Hyperbel größer als 1. Die Umkehrung folgt aus § 21.

5. Der Kegelschnitt und der Basiskreis oder überhaupt die Ebene ε und die Basisebene stehen in folgender Beziehung:

1. Entsprechende Punkte (T, R) liegen auf Geraden, welche durch den Punkt S gehen.
2. Entsprechende Gerade (t, t_1) schneiden sich in Punkten, welche auf der Geraden e_1 liegen.
3. Bei Inzidenz von T und t sind auch R und t_1 inzident.

Diese Verwandtschaft ist eine Verallgemeinerung der perspektiven Affinität und heißt perspektive Kollineation. Der Kegelschnitt ist mit dem Basiskreise perspektiv kollinear. Der Punkt S heißt das Kollineationszentrum und die Gerade e_1 die Kollineationsachse. Aus der Verwandtschaft ist zu ersehen, daß eine Gerade g mit dem Kegelschnitte ebenso wie beim Kreise zwei Schnittpunkte ergibt und daß man aus einem Punkte P zwei Tangenten an den Kegelschnitt ziehen kann.

Der Kegelschnitt ist eine Linie 2. Ordnung und eine Kurve 2. Klasse.

Die Polarität des Kreises wird durch die Kollineation in die Polarität des Kegelschnittes übergeführt.

Es ist noch hervorzuheben, daß sich bei der Kollineation die uneigentlichen Geraden der Ebenen nicht mehr entsprechen. Der uneigentlichen Geraden der Ebene ε entspricht die Spur f_1 der durch S parallel zu ε gehenden Ebene φ; der uneigentlichen Geraden der Basisebene entspricht die Schnittgerade v der durch S parallel zur Basisebene gehenden Ebene mit ε. Man nennt f_1 die Fluchtgerade und v die Verschwindungsgerade.

Im ersten Falle schneidet f_1 den Basiskreis in zwei imaginären Punkten; daher hat die Ellipse zwei imaginäre uneigentliche Punkte (sie verläuft ganz im Endlichen). Im zweiten Falle ist f_1 eine Tangente des Basiskreises, hat also bei Q zwei vereinigte Schnittpunkte; daher hat die Parabel zwei vereinigte uneigentliche Punkte als zweiten Scheitel und die uneigentliche Gerade selbst als zugehörige Tangente. Der uneigentliche Scheitel ist als Pol der uneigentlichen Geraden auch als Mittelpunkt der Parabel zu betrachten. Der Kreis $[O, a]$ für die Ellipse geht hier in die Scheiteltangente über, woraus sich wieder eine Konstruktion der Tangenten aus einem Punkte an die Parabel (§ 13, 3) ergibt. Im dritten Falle schneidet f_1 den Kreis in zwei reellen Punkten Q_I, Q_{II}, welche zwei reelle uneigentliche Punkte U_I, U_{II} der Hyperbel liefern, da die Erzeugenden SQ_I und SQ_{II} zu [illegible] sind. Di[illegible] zu SQ_I gehörige Tangentialebene [illegible] Sp[illegible]. [illegible] Schnittgerade dieser Tangentialebene [illegible] Schni[illegible]punkt von u_1 mit e_1 parallel zu SQ_I [illegible] gehörige Tangente u_I der Hyperbel. Di[illegible] Tang[illegible]

eines uneigentlichen Punktes einer Linie heißt A s y m p t o t e". Der Schnittpunkt der beiden Asymptoten u_I, u_{II} ist als Pol der uneigentlichen Geraden der Mittelpunkt der Hyperbel.

6. D e r G r u n d r i ß d e s K e g e l s c h n i t t e s s t e h t m i t d e m B a s i s k r e i s e i n d e r s e l b e n V e r w a n d t s c h a f t. Dabei ist S' das Kollineationszentrum und v' die Verschwindungsgerade.

Jeder Punkt T' hat vom Punkt S' einen Abstand $S'T' = MN$ und von der Geraden v' einen Abstand $T'L' = T''L''$. Bezeichnet man die Strecke $SM = V_2 L''$ mit h, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke $S''MN$

$$MN = h \cdot \operatorname{tg} \beta$$

und aus dem rechtwinkligen Dreiecke $V_2 L'' T''$

$$T''L'' = h \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Es ist also

$$\frac{T'S'}{T'v'} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Für $\alpha \gtreqless \beta$ ist $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \lesseqgtr 1.$

D e r N o r m a l r i ß d e s K e g e l s c h n i t t e s a u f d e r E b e n e d e s B a s i s k r e i s e s i s t e i n g l e i c h a r t i g e r K e g e l s c h n i t t, w e l c h e r d e n N o r m a l r i ß S' d e r S p i t z e a l s B r e n n p u n k t u n d d e n N o r m a l r i ß v' d e r V e r s c h w i n d u n g s g e r a d e n v a l s L e i t g e r a d e b e s i t z t.

Die Horizontale $S''V_2$ ist der vierte harmonische Strahl zur Kegelachse in bezug auf die beiden Umrißerzeugenden; daher ist v die Polare des Schnittpunktes der Kegelachse mit ε und v' ist die Polare von S'.

„Die Leitgerade ist die Polare des Brennpunktes in bezug auf den Kegelschnitt."

Die durch S gehende Horizontale der Berührungsebene längs der Kegelerzeugenden SR geht durch den Schnittpunkt von t und v; im Grundrisse erscheint sie normal zu $S'R'$.

„Die Strecke der Tangente eines Kegelschnittes vom Berührungspunkte bis zur Leitgeraden erscheint aus dem zugehörigen Brennpunkte unter einem Rechtwinkel."

Ist die Ebene ε nicht zur Aufrißebene normal, so [illegible] man durch Ei[illegible] Projektionsebene od[illegible] durch D[illegible] auf den beschriebenen

Fall zurückkommen. Der Aufriß des Kegelschnittes ist dann ein gleichartiger Kegelschnitt, für welchen die Aufrisse der Achsen konjugierte Durchmesser sind. Er berührt den scheinbaren Umriß doppelt, nämlich in den Aufrissen der Punkte, welche auf den Umrißerzeugenden liegen und bei welchen der Kegelschnitt unsichtbar wird.

§ 21. Umkehrungsaufgabe über die ebenen Schnitte eines Drehkegels; Zeichnen der Kegelschnitte.

1. Die Umkehrungsaufgabe über die ebenen Schnitte eines Drehkegels kann in zweifacher Weise gestellt und gelöst werden:

Ein Drehkegel $[S, z, \beta]$ und ein Kegelschnitt $[A_I A_{II}, F_I F_{II}]$ sind gegeben; man soll

α) den Kegelschnitt auf den gegebenen Drehkegel legen,

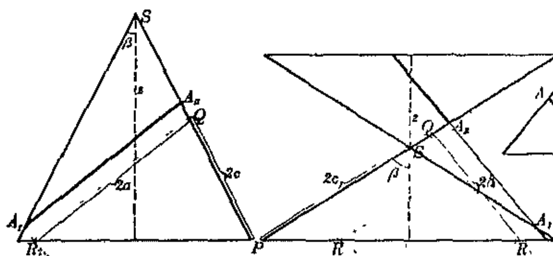
β) den Drehkegel durch den gegebenen Kegelschnitt legen.[23]

Die Aufgabe α) kann für die Ellipse und Hyperbel (Fig. 89 c) nach der Schlußbemerkung von § 20, 3 gelöst werden. Man stellt ein Hilfsdreieck PQR her, indem man von P aus die doppelte Exzentrizität $2c$ auf der Umrißerzeugenden des Kegels (Fig 89 a, b) aufträgt. Der Endpunkt Q ist der Mittelpunkt eines Kreises mit der Hauptachse $2a$ als Radius, woraus sich der Eckpunkt R ergibt. Verschiebt man die Seite PQ auf der Umrißerzeugenden, bis der Punkt R auf die andere Umrißerzeugende kommt, so geht die Seite RQ in die Hauptachse $A_I A_{II}$ des ebenen Schnittes über, welcher dem gegebenen Kegelschnitte kongruent ist. Der zweite Schnittpunkt R des Kreises führt zu einem symmetrisch liegenden ebenfalls kongruenten Kegelschnitt. Auf den gegebenen Kegel kann man jede beliebige Ellipse legen, aber nur solche Hyperbeln, für welche $2a > 2c \cos \beta$ ist.

Für die Parabel (Fig. 90 b) stellt man ein Hilfsdreieck SPQ her, indem man von S aus den halben Parameter $p/_2$ auf der Umrißerzeugenden des Kegels (Fig. 90 a) aufträgt. Im Endpunkt P errichtet man eine Senkrechte zu dieser Erzeugenden und in S eine Senkrechte zu z, so ergibt sich der Eckpunkt Q. Verschiebt man das Dreieck parallel zur andern

Umrißerzeugenden, bis Q auf z (nach O) kommt, dann geht der Eckpunkt S in den Scheitel A eines Parabelschnittes über, welcher der gegebenen Parabel kongruent ist.

Für die Aufgabe β) sei zunächst eine Ellipse auf der Grundebene so angenommen, daß die große Achse $A_I A_{II}$ auf der Bildachse liegt (Fig. 89c). Da die große Achse die Orthogonalprojektion der Kegelachse ist, so muß die Achse und die



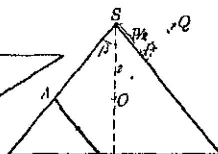


Fig. 89a. Fig. 89b. Fig. 90a.

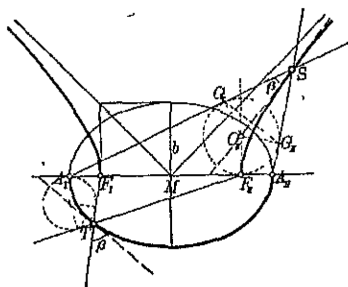


Fig. 89c.

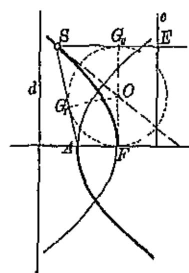


Fig. 90b.

Spitze des Kegels auf der Aufrißebene liegen. Es sei nun eine Kugel gedacht, welche die Grundebene im Brennpunkte F_{II} berührt. Ihr Mittelpunkt O_{II} liegt auf der Normalen zur Grundebene im Punkte F_{II}. Ihr scheinbarer Umriß kann sofort gezeichnet werden. Zieht man aus A_I und A_{II} die Tangenten an den Umrißkreis, so schneiden sie sich in einem Punkte S. Ihre Berührungspunkte seien G_I und G_{II}. Betrachtet man S als Spitze eines Berührungskegels der Kugel, so ist der Schnitt dieses Kegels mit der Grundebene eine Ellipse, welche $A_I A_{II}$ als große Achse und F_{II} als Brennpunkt hat. Diese Schnittlinie muß mit der gegebenen Ellipse identisch sein, weil durch

die große Achse und einen Brennpunkt die Ellipse eindeutig bestimmt ist. Es ist also ein Drehkegel gefunden, welcher durch die gegebene Ellipse geht.

Nun gibt es ∞^1 Kugeln, welche die Grundebene im Punkte F_{II} berühren, und jede solche Kugel gibt einen neuen Drehkegel, welcher durch die Ellipse geht. Die Spitzen dieser Kegel bilden eine Linie, für welche man leicht eine charakteristische Eigenschaft angeben kann.

Es ist

$$SG_I = SG_{II}, \quad G_I A_I = A_I F_{II}, \quad G_{II} A_{II} = A_{II} F_{II}$$

und

$$SA_I = SG_I + G_I A_I,$$
$$SA_{II} = SG_{II} + G_{II} A_{II},$$

also

$$SA_I - SA_{II} = G_I A_I - G_{II} A_{II} = A_I F_{II} - A_{II} F_{II}$$

oder

$$SA_I - SA_{II} = F_I F_{II}.$$

„Die Spitzen der ∞^1 Drehkegel, welche durch eine Ellipse gehen, bilden eine Hyperbel, welche auf der durch die Hauptachse gehenden, senkrechten Ebene liegt, die Scheitel der Ellipse als Brennpunkte und die Brennpunkte der Ellipse als Scheitel hat. Die Achsen der Drehkegel sind die Tangenten der Hyperbel, insbesondere sind die Achsen der beiden Drehzylinder die Asymptoten der Hyperbel."

Für diese Kegel nimmt der Winkel β alle Werte von 0 bis $\pi/_2$ an. In eine gegebene Ellipse paßt also jeder beliebige Drehkegel.

Sollen umgekehrt durch die gefundene Hyperbel Drehkegel gelegt werden, so denkt man sich eine Kugel, welche die Aufrißebene im Punkt A_I berührt. Zieht man aus F_I und F_{II} die Tangenten an den Umrißkreis dieser Kugel, so ist ihr Schnittpunkt T die Spitze eines solchen Kegels. Für den Punkt T ist dann $TF_I + TF_{II} = A_I A_{II}$ und als Linie der Spitzen ergibt sich die ursprüngliche Ellipse. Die Beziehung der beiden Linien (Fokalkegelschnitte) ist also eine wechselseitige und der obige Satz bleibt auch richtig, wenn man „Hyperbel" und „Ellipse" vertauscht. Hier nimmt aber der Winkel β für diese Kegel nicht alle Werte bis $\pi/_2$ an, sondern der kleinste Winkel ist jener, welchen die Asymptoten mit der reellen Achse bilden, bei welchen also [illegible] ist. In eine gegebene Hyperbel passen [illegible] solche Drehkegel, für welche der Winkel β zwischen den Grenzen [illegible] liegt.

Unter den ∞^1 Kegeln sind noch jene aufzusuchen, welche an der Spitze den gegebenen Winkel 2β besitzen. Zu diesem Zwecke zeichnet man bei der Ellipse den Kreis, welcher die Hauptachse als Sehne und den Winkel 2β als zugehörigen Peripheriewinkel besitzt. Zwei von den Schnittpunkten des Kreises mit der Fokalhyperbel sind Spitzen von möglichen Kegeln. Diese Punkte sind auch die Berührungspunkte der Tangenten aus dem Schnittpunkte des Kreises mit der Nebenachse der Ellipse, so daß sie mit Lineal und Zirkel gefunden werden können, ohne die Hyperbel zu zeichnen. Für die Hyperbel ist der Vorgang analog.

Nimmt man nun auf der Grundebene eine Parabel $[A, F]$ an (Fig. 90b), legt eine Kugel, welche in F die Grundebene berührt, und zieht aus A und A_∞ die Tangenten an ihren Umrißkreis, so ist wieder S die Spitze und SO die Achse eines Drehkegels, der durch die gegebene Parabel geht. Macht man $G_{II}E = G_I A = AF$ und zieht durch E eine Parallele e zur Leitgeraden d, so ist $SG_I = SG_{II}$ und $SA = Se$. Die Punkte S bilden also eine Parabel, welche A als Brennpunkt und e als Leitgerade besitzt.

„Die Spitzen der ∞^1 Drehkegel, welche durch eine Parabel gehen, bilden eine gleiche Parabel, welche auf der durch die Achse gehenden, senkrechten Ebene liegt, den Scheitel der gegebenen Parabel als Brennpunkt und den Brennpunkt als Scheitel hat. Die Achsen der Drehkegel sind die Tangenten dieser Parabel."

Die Beziehung der beiden Parabeln ist eine wechselseitige. Der Winkel β nimmt dabei alle Werte von 0 bis $\pi/_2$ an. In eine gegebene Parabel paßt also jeder beliebige Drehkegel. Es ist der Strahl AO unter dem Winkel $(\pi/_2 - \beta)$ zu ziehen, um die Achse und Spitze des passenden Kegels zu finden.

2. α) Es sei wieder eine Parabel $[A, F]$ wie vorhin auf der Grundebene gewählt (Fig. 91) und durch diese Parabel jener Drehkegel gelegt, für welchen $\beta = \pi/_4$ ist. Die in F die Grundebene berührende Kugel hat dann einen Radius, welcher dem halben Parameter AF gleich ist. Ein beliebiger Punkt O der [illegible] Mittelpunkt einer Kugel, [illegible] den K[illegible] $M'N'$, $M''N''$ [illegible] Grundebene in [illegible] Kreise [illegible] O [illegible] Mittelpunkt und OQ als R[illegible] zwei Schnittpunkte T, T' [illegible] $M''N''$

mit der Bildachse liegt, und welche der Schnittparabel angehören. Die Grundspuren der Tangentialebenen der Kugel und des Kegels für diese Punkte sind: $t_I \perp O'T_I$ und $t_{II} \perp O'T_{II}$. Sie sind die Tangenten der Parabel für die Punkte T_I und T_{II}; der Kreis $[O', O'Q]$ ist also ein doppelt berührender Kreis der Parabel. Da $O'N'' = p$ und Winkel $O'N''T'' = \pi/_4$ ist, so ist auch $O'T'' = p$.

„Die Subnormale der Parabel ist konstant, dem Parameter gleich."

Der Pol R der Geraden $T_I T_{II}$ liegt auf der Achse so, daß $RA = AT''$ ist, weil R, T'' mit den beiden Scheiteln, von welchen der eine uneigentlich ist, vier harmonische Punkte bilden.

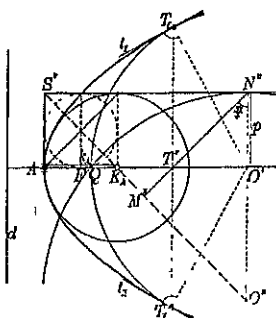


Fig. 91.

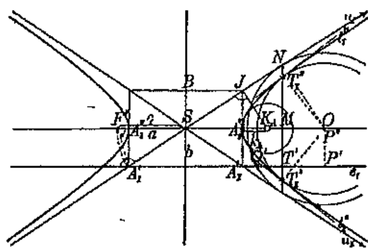


Fig. 92.

„Die Subtangente der Parabel ist der doppelten Abszisse gleich."

Bezeichnet man AT'' mit x und $T''T_I$ mit y, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke $O'RT_I$ die Gleichung der Parabel:

$$y^2 = 2px.$$

Rückt der Kugelmittelpunkt O in den Schnittpunkt K_A der Drehachse mit der Grundebene, so wird der Radius der Kugel und des Schnittkreises gleich p. Die beiden Punkte T_I, T_{II} rücken nach A, so daß der Schnittkreis hier vier benachbarte Punkte mit der Parabel gemein hat; daher ist er der Krümmungskreis für den Scheitel A, der Punkt K_A ist der zugehörige Krümmungsmittelpunkt und $k_A = p$ der Krümmungsradius. Außer Punkten und Tangenten wird dieser Kreis beim Zeichnen der Parabel benützt.

Rückt der Punkt O weiter hinauf, so ergeben sich zunächst Schnittkreise, welche in imaginären Punkten berühren. Wird der Radius gleich $p/_2$, so erhält man einen Nullkreis bei F und dann imaginäre Schnittkreise.

β) Ein Drehkegel, welcher die Bildachse als Drehachse besitzt, werde mit einer Ebene ε geschnitten, welche im Abstande b zur Aufrißebene parallel ist (Fig. 92). Die Spur e_1 der Ebene ist im Abstande b zur Achse parallel. Der Aufriß der Schnitthyperbel hat die Spitze S als Mittelpunkt und die Umrißerzeugenden u_I, u_{II} als Asymptoten, ferner A_I'', A_{II}'' als Scheitel.

Ein beliebiger Punkt O der Achse ist wieder der Mittelpunkt einer Kugel, welche längs eines Kreises $[M, MN]$ den Kegel berührt und die Ebene ε in einem Kreise schneidet, welcher den Fußpunkt P aus O auf ε als Mittelpunkt und die halbe Sehne $P'Q'$ des Umrißkreises auf e_1 als Radius hat. Der Aufriß des Schnittkreises erscheint in wahrer Größe und hat $P'' = O$ als Mittelpunkt. Der Berührungskreis und der Schnittkreis ergeben zwei Punkte T_I, T_{II} der Schnitthyperbel. Ihr Grundriß T' ist der Schnittpunkt von MN mit e_1; ihre Aufrisse T_I'', T_{II}'' sind die Schnittpunkte von MN mit dem Aufrisse des Schnittkreises. Die Frontalen der Tangentialebenen der Kugel und des Kegels für die gefundenen Punkte sind $t_I'' \perp OT_I''$ und $t_{II}'' \perp OT_{II}''$. Sie sind die Tangenten der Hyperbel für die Punkte T_I'' und T_{II}''; der Kreis $[O, P'Q']$ ist ein doppelt berührender Kreis der Hyperbel.

Bezeichnet man SM mit x und MT_I'' mit y, so ist $MT_I = MN$, $T_I T_I'' = b$, $MN : x = b : a$, und aus dem rechtwinkligen Dreiecke $MT_I T_I''$ folgt nun die Gleichung der Hyperbel:

$$\left(x \frac{b}{a}\right)^2 - y^2 = b^2.$$

Ist $\beta = \pi/_4$, so wird der Abstand $b = a$ und man erhält eine gleichseitige Hyperbel. Ihre Asymptoten sind zueinander normal und ihre Gleichung heißt:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Rückt der Punkt N in den Schnittpunkt J der Asymptote u_I mit der Scheiteltangente, so kommt der Punkt O in den Schnittpunkt K_A der Normalen bei J zur Asymptote u_I mit der Achse. Der Aufriß des Schnittkreises hat dann K_A als Mittelpunkt und

$K_A A''_{II}$ als Radius. Die Berührungspunkte T''_I und T''_{II} vereinigen sich dann bei A''_{II}; daher ist dieser Kreis der Krümmungskreis für den Scheitel A''_{II}.

Für das Zeichnen der Hyperbel werden außer Punkten und Tangenten besonders die Krümmungskreise für die beiden Scheitel benützt. Anderseits ist zu beachten, daß die Hyperbel in ihrem weiteren Verlaufe nahezu geradlinig wird und sich dabei den Asymptoten nähert.

Der Mittelpunkt einer Kugel, welche auch die schneidende Ebene berührt, liegt auf der Halbierungsgeraden des Winkels bei A'_I. Er ist jetzt auch der Aufriß F'' eines Brennpunktes der Schnitthyperbel. Weil nun bei F'' ein Wechselwinkel zur Winkelhälfte auftritt, so ist $SA'_I F''$ ein gleichschenkliges Dreieck und die Exzentrizität $c = SF'' = SA'_I$. Für $x = 0$ erhält man aus der Gleichung der Hyperbel $y = \pm b \cdot i$. Auf der zweiten Achse der Hyperbel liegen also zwei imaginäre Punkte im Abstande $b \cdot i$. Man nennt deshalb die Strecke $SB = b$ die halbe imaginäre Achse der Hyperbel und es ist hier

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Man kann auch Instrumente herstellen, welche das Zeichnen der Parabel oder Hyperbel ermöglichen. So z. B. gibt es ein Instrument, welches die in Nr. 1 gezeigten Beziehungen verwirklicht und welches je nach der Einstellung eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel zu zeichnen gestattet*).

Übungsaufgaben: 1. Im Inneren eines Drehkegels ist ein Punkt F gegeben. Man soll Kegelschnitte finden, welche F als Brennpunkt haben. Wo liegen die Brennpunkte aller Parabelschnitte?

2. Durch eine Gerade sind Ebenen zu legen, welche einen gegebenen Drehkegel nach Parabeln schneiden.

3. Durch eine Gerade sind Ebenen zu legen, welche einen gegebenen Drehkegel nach gleichseitigen Hyperbeln (oder Hyperbeln mit gegebenem Asymptotenwinkel) schneiden. Was umhüllen die Parallelebenen φ zu allen Ebenen, welche [illegible] liefern?

4. Auf einer zur Aufrißebene [illegible] Kegelschnitt (Ellipse, Parabel, Hyperbel [illegible] ißebene parallel ist. Man soll durch ihn [illegible] Achse zur Grundebene senkrecht ist.

5. Durch einen Kege[illegible] ist ein Drehkegel mit [illegible] (ohne den zugehörigen [illegible]

*) Katalog mathem[illegible] München 1892, S. 229.

6. Von einer Hyperbel sind die Asymptoten und ein Punkt gegeben.
7. Von einem Kegelschnitte sind drei Punkte und zwei Tangenten gegeben.
8. Von einem Kegelschnitte sind drei Punkte und ein Brennpunkt gegeben [4 Lösungen; 3 müssen Hyperbeln sein, die 4. kann eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein].
9. Ein Kegelschnitt, dessen Form durch das Verhältnis $c:a$ gegeben ist, soll durch zwei Punkte R', T' gehen und einen Brennpunkt S' besitzen.

§ 22. Beleuchtung der Kugel.

1. Die Grenze zwischen dem beleuchteten und unbeleuchteten Teile einer Fläche heißt Lichtgrenze. Für Parallelbeleuchtung ist die Lichtgrenze die Berührungslinie des von Lichtstrahlen gebildeten Berührungszylinders.

Eine Kugel sei durch den Mittelpunkt O und den Radius r gegeben; ferner sei l der Lichtstrahl, welcher durch den Mittelpunkt geht (Fig. 93).

Die Lichtgrenze der Kugel für Parallelbeleuchtung ist der Großkreis, dessen Ebene zur Richtung der Lichtstrahlen normal ist. Diese Ebene ist die Polarebene des uneigentlichen Punktes der Lichtstrahlen:

Legt man durch den Lichtstrahl l die zur Grundebene normale Ebene, so ist sie eine Symmetrieebene für die hier in Betracht kommenden räumlichen Beziehungen und l' eine Symmetrieachse für die Abbildung im Grundrisse. Diese Symmetrieebene wählt man als neue Projektionsebene (§ 9, 4), die man auf die Ebene des Umrißkreises umlegt. Der neue Umriß der Kugel stimmt dabei mit dem Umrißkreise für den Grundriß überein. Der Lichtstrahl l ergibt durch einen zweiten Punkt P (etwa den Schnittpunkt von l mit der Grundebene) die Umlegung $l^0 = O'P^0$, wobei die Strecke, um welche der Punkt P tiefer liegt als O, auf der Normalen in P' zu l' aufzutragen ist, um P^0 zu erhalten. Die Gerade l^0 bildet mit der Normalen zu l' den Einfallswinkel ε_1 der Lichtstrahlen gegen die Grundebene. Die Lichtgrenze erscheint in der neuen Projektion als jener Durchmesser $B_I^0 B_{II}^0$ des Umrißkreises, der zu l^0 normal ist. Der Grundriß der Lichtgrenze ist eine Ellipse, für welche der zu l' normale Durchmesser $A_I' A_{II}'$ des Umrißkreises die große Achse und die Projektion $B_I' B_{II}'$ von $B_I B_{II}$

Fig. 93.

die kleine Achse ist. Der Winkel $B_I^0 O' B_I'$ ist dem Einfallswinkel ε_1 gleich; es ist also

$$a = r, \quad b = r \cdot \cos \varepsilon_1, \quad c = r \cdot \sin \varepsilon_1.$$

Von der Lichtgrenze ist eine Hälfte sichtbar (in der Figur ist es der Halbkreis $A_I B_I A_{II}$), die andere Hälfte unsichtbar. Von der unbeleuchteten Hälfte der Kugel ist im Grundrisse nur ein Teil sichtbar.

2. Der Schlagschatten der Kugel auf die Grundebene ist die Schnittlinie der Grundebene mit dem normalen Kreiszylinder, welcher die Kugel längs der Lichtgrenze berührt, also eine Ellipse (§ 12, 4). Die Grundspur $O_1 = P'$ des Lichtstrahles l, der die Achse des Zylinders ist, ist der Mittelpunkt der Ellipse und l' ist die Richtung der großen Achse. Senkrecht dazu ist $O_1 A_1 = r$ die halbe kleine Achse. Zieht man in B_I^0 die Tangente an den Umrißkreis, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse a_1 die halbe große Achse der Schnittellipse angibt, während die eine Kathete der Exzentrizität c_1 gleich ist. Es ist dann $O_1 B_1$ gleich a_1 zu machen. Nun ist also

$$a_1 = \frac{r}{\cos \varepsilon_1}, \quad b_1 = r, \quad c_1 = r \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_1.$$

Vergleicht man die Werte von a, b, c mit jenen von a_1, b_1, c_1, so sieht man, daß

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \cos \varepsilon_1.$$

Der Grundriß der Lichtgrenze einer Kugel und der Schlagschatten der Kugel auf die Grundebene sind ähnliche Ellipsen. Die Brennpunkte der Schlagschattenellipse ergeben sich auch als Schlagschatten der Endpunkte des zur Grundebene normalen Durchmessers der Kugel (§ 12, 4). Der Schlagschatten auf der Grundebene ist bei der in der Figur gemachten Annahme zum Teile von der Kugel selbst verdeckt.

3. Der Lichtstrahl l, welcher durch den Mittelpunkt der Kugel geht, schneidet die Kugel in zwei Punkten H und G, in welchen er zu dem zugehörigen Flächenelemente der Kugel normal ist (der Einfallswinkel $\varepsilon = 0$). In dem Punkte H herrscht daher die größte Helligkeit auf der beleuchteten Seite; im Punkte G ist die hellste Stelle auf der unbeleuchteten Seite der Kugel. Die Grundrisse H' und G' dieser hellsten

Punkte der Kugel ergeben sich aus den Umlegungen H^0 und G^0. Aus dem, was im § 18, 3 gezeigt wurde, folgt:

Die Grundrisse der hellsten Punkte einer Kugel sind die Antibrennpunkte der Ellipse, welche den Grundriß der Lichtgrenze der Kugel bildet.

4. Von den hellsten Punkten H und G aus nimmt die Helligkeit gegen die Lichtgrenze hin ab. Wählt man auf dem Umrißkreise der neuen Projektion einen Punkt J^0, zieht den Lichtstrahl, welcher in J einfällt und die Flächennormale (den Radius) für den Punkt J der Kugel, so erscheint der Einfallswinkel ε in wahrer Größe als Winkel der Richtung l^0 mit $O'J^0$, sowohl bei J^0 als auch bei O'. Dreht sich der Großkreis der Symmetrieebene um den Lichtstrahl l, so beschreibt der Punkt J einen Kreis i, dessen Ebene zu l normal ist und dessen Punkte denselben Einfallswinkel ε ergeben. In allen Punkten dieses Kreises i herrscht daher dieselbe Helligkeit $h = r \cdot \cos \varepsilon$ (§ 8, 5). „Eine Linie einer Fläche, in deren Punkten dieselbe Helligkeit herrscht, heißt **Isophote.**“[24]

Die Isophoten der Kugel sind Kreise, deren Ebenen zur Richtung der Lichtstrahlen normal sind.

Die Isophote i erscheint in der neuen Projektion als jene Sehne des Umrißkreises, welche durch J^0 normal zu l^0 geht. Ihr Schnittpunkt M^0 mit l^0 ist die Projektion des Mittelpunktes der Isophote. Die zu dieser Isophote gehörige Helligkeit ist proportioniert der Strecke $O'M^0 = r \cdot \cos \varepsilon$. Von der Lichtgrenze bis zum hellsten Punkte werden auf der beleuchteten Seite der Kugel 10 und auf der unbeleuchteten Seite 5 Helligkeitstufen hergestellt. Um die Isophoten zu erhalten, welche diese Helligkeitszonen begrenzen, teilt man die Strecke $O'H^0$ in 10 und die Strecke $O'G^0$ in 5 gleiche Teile. Die Sehnen des Umrißkreises, welche durch diese Teilpunkte normal zu l^0 gehen, sind die neuen Projektionen der verlangten Isophoten.

Der Grundriß der Isophote i ist eine Ellipse, für welche sich sofort der Mittelpunkt M' sowie der Endpunkt J' der kleinen Achse durch Fällen von Normalen aus M^0 und J^0 zu l' ergibt; die halbe große Achse $M'K' = M^0J^0$. Der Schnittpunkt der Sehne i^0 mit l' ist die neue Projektion der zwei Punkte R, S der Isophote i, welche auf dem Umriß-kreise liegen, bei welchen also [illegible]. Errichtet man in diesem Sch[illegible]

Sehne des Umrißkreises, so erhält man den Grundriß R', S' jener zwei Punkte. Die Ellipse i' muß den Umrißkreis in diesen beiden Punkten R', S' berühren. Die Projektion der Tangente des Kreises i für einen solchen Punkt fällt nämlich in die Tangente des Umrißkreises, da diese zugleich die Spur der projizierenden Tangentialebene des Punktes ist. Die Tangentialebenen für H und G haben Spuren h_0, h_1 und g_0, g_1, während die Ebene der Lichtgrenze die Spuren n_0, n_1 besitzt. Die Sehnen $R'S'$ ergeben sich auch, indem man den Streifen zwischen h_1 und n_1 in 10, jenen zwischen n_1 und g_1 in 5 gleiche Teile teilt.

5. Weil die Isophotenkreise auf parallelen Ebenen liegen, so müssen *die Grundrisse der Isophoten ähnliche Ellipsen* sein.

Jene Punkte K der Isophotenkreise, welche als Scheitel K' der großen Achsen dieser Ellipsen erscheinen, liegen auf dem Großkreise, der durch $A_I A_{II}$ und H geht. *Die Scheitel* K' *bilden daher eine Ellipse, welche* $O'A'_{II}$ *und* $O'H'$ als Halbachsen hat. Diese Ellipse ist orthogonal perspektiv affin mit den Kreisen $[O', r]$ und $[O, c]$. Die letztere Affinität hat die Charakteristik $\delta = \frac{O'A'_{II}}{O'F_{II}} = \frac{M'K'}{M'F}$. Wegen der Ähnlichkeit der Ellipse i' mit der Projektion der Lichtgrenze ist also der Schnittpunkt F der Strecke $M'K'$ mit dem Kreise $[O', c]$ der Brennpunkt von i'.

Die Brennpunkte der Grundrisse der Isophoten der Kugel liegen auf dem Kreise $[O', c]$.

Geht man von M' aus, so schneidet die Normale in M' zu l' den Kreis $[O', c]$ in F und die Gerade $O'F$ schneidet den Umrißkreis in E. Fällt man von E die Normale zu $M'F$, so erhält man den Scheitel K'. Man kann also die Ellipsen auch ohne die Umlegung finden. (Auch die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel der großen Achsen liegen auf einer Ellipse mit den Achsen $r \cdot \sin \varepsilon_1$ und $r \cdot \sin \varepsilon_1^2$.) Aus der Umlegung ist zu sehen, daß der höchste Punkt der Kugel, in welchem die Tangenti[illegible]ezu auf der Isophote 8 liegt. Die [illegible] ist deshalb hier $h = r \cdot 0{,}8$.

6. Für die Konstruktion im *Aufrisse* legt man die Ebene, welche durch l normal zur Aufrißebene geht. Mit Hilfe dieser

Symmetrieebene ist dann das Analoge auszuführen wie im Grundrisse. Zunächst erhält man die große Achse für den Aufriß der Lichtgrenze; nämlich $C_I''C_{II}''$ ist normal zu l''. Man kann aber auch den Grundriß benützen. Der Aufriß A'' des Punktes A liegt in dem Ordner zu A' auf dem horizontalen Durchmesser des Umrißkreises, da dieser der Aufriß des anderen Umrißkreises ist. Jetzt kennt man von der Ellipse die große Achse und einen Punkt, woraus man mit Hilfe der Affinität (oder der kinematischen Entstehung der Ellipse) die halbe kleine Achse $O''D''$ finden kann. Man kann aber auch den Aufriß H'' des hellsten Punktes als Schnittpunkt des Ordners von H' mit l'' finden. Überträgt man die Strecke $O''H''$ auf $C_I''C_{II}''$, so erhält man die Brennpunkte des Aufrisses der Lichtgrenze. Dann können die Aufrisse der Isophoten in der früher angegebenen Weise ohne Umlegung gefunden werden.

In der Zeichnung werden die Helligkeitstufen hergestellt, indem man zuerst das ganze Kugelbild mit der dem hellsten Teile entsprechenden Tuschlage überzieht. Nach dem Trocknen wird das Kugelbild mit Ausschluß der hellsten Zone nochmals angelegt, dann mit Ausschluß der beiden hellsten Zonen ein drittes Mal usw. Da aber bei wiederholtem Anlegen die Dunkelheit nicht der Zahl der Tuschlagen proportioniert zunimmt, so muß nach etwa dreimaligem Anlegen schon etwas Tusch zugesetzt werden, um wieder einen merklichen Unterschied zu erzielen. Zuletzt ist noch das ganze Kugelbild mit einer schwachen Lage der dem Materiale entsprechenden Farbe zu überziehen.

Übungsaufgabe: Es ist der Mittelpunkt einer Kugel und der Grundriß einer Isophote gegeben. Man soll den Umriß der Kugel finden.

Auf dasselbe kommt die Aufgabe hinaus: Vom Punkte O der kleinen Achse einer Ellipse sind die Normalen auf die Ellipse zu fällen.

7. Für Diagonalbeleuchtung (Fig. 94) ergibt sich die Umlegung l^0 des Lichtstrahles auf die Ebene des horizontalen Umrißkreises ohne Benützung des Aufrisses, indem man den Punkt P als Eckpunkt des Würfels mit der Kante r annimmt. Man zieht im Endpunkte Q' des horizontalen Halbmessers $O'Q'$ den Ordner und macht $P'Q' = P'P^0$. Der Grundriß der Lichtgrenze und der Schlagschatten auf eine Grundebene können hier aber auch leicht ohne diese Umlegung konstruiert werden. Für Diagonalbeleuchtung ist nämlich (§ 8, 1):

$$\sin \varepsilon_1 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \cos \varepsilon_1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \sqrt{2}.$$

Daher ist (§ 13, 1 und 2):

$$a = r, \qquad b = r\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \frac{r}{3}\sqrt{3}, \qquad c = r\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

$$a_1 = r\sqrt{3}, \quad b_1 = r, \qquad c_1 = r\sqrt{2}.$$

Die besonderen Werte von a_1 und b zeigen:

Die halbe große Achse a_1 der Schlagschattenellipse ist die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite $2r$; daher ergibt sich der Scheitel B_1 als Schnittpunkt von l' mit dem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt A_1 und dessen Radius $2r$ ist.

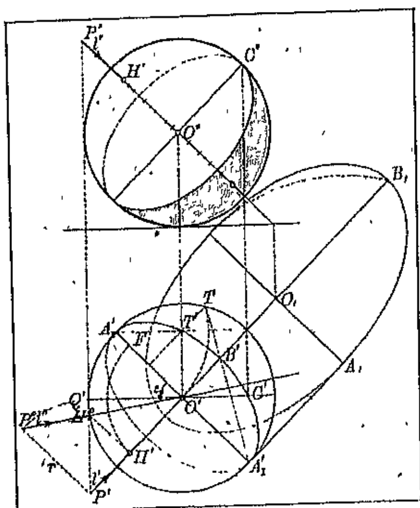


Fig. 94

Die halbe kleine Achse b der Projektion der Lichtgrenze ist ein Drittel jener Höhe; daher ergibt sich der Scheitel B', indem man mit dem Mittelpunkte A'_{II} und dem Radius r den Kreisbogen $O'\,T$ zeichnet und T mit A'_I verbindet*). Die Isophoten sind dann wie im allgemeinen Falle zu konstruieren. Im Aufrisse ergibt sich hier alles kongruent dem Grundrisse, aber um $\pi/_2$ gedreht.

8. Zentralbeleuchtung der Kugel.

Gehen die Lichtstrahlen von einem eigentlichen Punkte L aus, so ist die Lichtgrenze der Kugel der Berührungskreis des von Lichtstrahlen gebildeten Berührungskegels. Dieser Kreis liegt auf der Polarebene des Punktes L in bezug auf die Kugel.

---

*) Der Scheitel B' ist der Höhenschnittpunkt des gleichseitigen Dreieckes mit der Seite $A'_I A'_{II}$. Der Punkt T ist eine Umlegung des Punktes T' der Ellipse, der auf dem Ordner des Punktes O liegt. Auch die Krümmungshalbmesser für die Scheitel der beiden Ellipsen haben einfache Werte:

$$k_{A'} = \frac{r}{3}, \qquad k_{B'} = a_1; \qquad k_{A_1} = 3\,r, \qquad k_{B_1} = b.$$

Man legt wieder den Lichtstrahl l, welcher durch den Mittelpunkt O der Kugel geht, und durch ihn die Ebene, welche zur Grundebene normal ist (Fig. 95). Diese Symmetrieebene wird als neue Projektionsebene auf die Ebene des Umrißkreises umgelegt. Die neue Projektion der Lichtgrenze ist die Berührungsehne $B_I^0 B_{II}^0$, welche auf der Polaren des Punktes L^0 in bezug auf den Umrißkreis liegt. Daraus ergeben sich die Achsen für den Grundriß der Lichtgrenze,

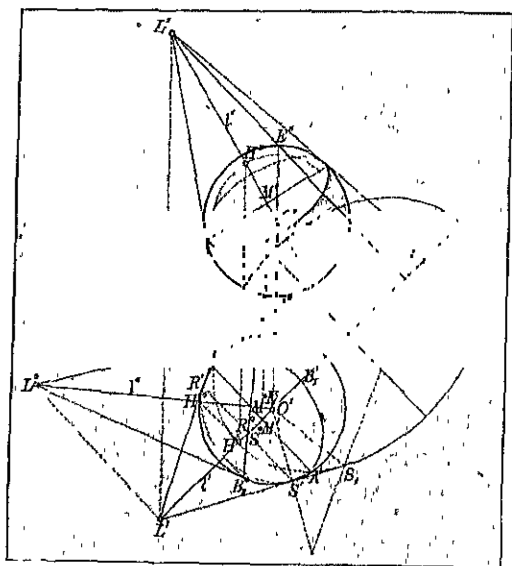


Fig. 95.

sowie die Punkte R', S', welche auf dem Umrißkreise liegen. Die Grundrisse G', H' der hellsten Punkte erhält man ebenfalls aus G^0 und H^0. Die Aufrisse G'', H'', M'' liegen auf l''. Für den Aufriß der Lichtgrenze [illegible] die große Achse angeben und [illegible] die B[illegible] die kleine Achse [illegible]

Der Schlagschatten der Kugel auf die Grundebene ist die [illegible] des [illegible] und der Grundebene. [illegible] E [illegible] E F [illegible] zur G[illegible] Durchmessers [illegible] die B[illegible]

punkte des Kegelschnittes. Der Schlagschatten S_1 von S ist ein Punkt und $L'S_1$ die zugehörige Tangente des Kegelschnittes, woraus dieser gezeichnet werden kann. Wenn L' innerhalb des Umrißkreises liegt, so sind die Punkte R' und S' imaginär. Man kann dann den Schatten A_1 des Punktes A benützen.

Zur Übung: Es ist ein Punkt L so zu wählen, daß der Schlagschatten der Kugel für die Grundebene eine Ellipse, für die Aufrißebene eine Parabel und für die Kreuzrißebene eine Hyperbel wird.

§ 23. Parallelbeleuchtung der Zylinder und Kegel.

1. Zylinder und Kegel werden von einer Tangentialebene in allen Punkten einer Erzeugenden berührt. Die Flächennormalen für diese Punkte sind also zueinander parallel und die Einfallswinkel der Lichtstrahlen gleich groß. In allen Punkten einer Erzeugenden herrscht daher die gleiche Helligkeit.

Die Isophoten der Zylinder und Kegel sind Erzeugende.

Für einen Drehzylinder mit vertikaler Achse und dem Radius r sei z. B. Diagonalbeleuchtung auszuführen. Die Lichtgrenze des Drehzylinders besteht aus den Erzeugenden, nach welchen die zu den Lichtstrahlen parallelen Tangentialebenen den Zylinder

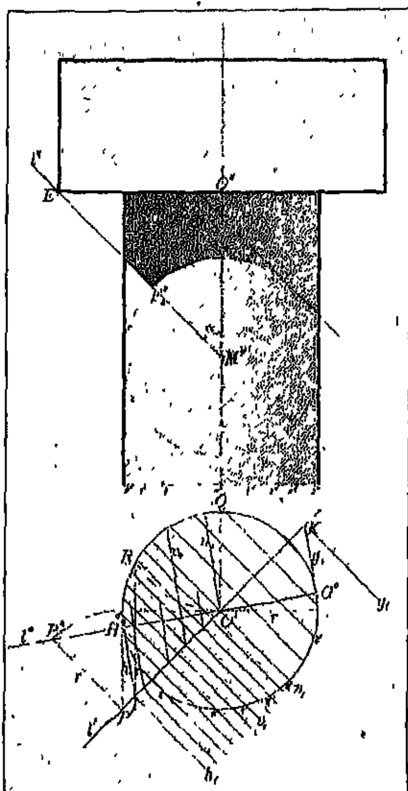


Fig 96

berühren. Sie gehen durch die Endpunkte des zu l' normalen Durchmessers des Grundkreises (Fig. 96).

Um die Isophoten zu konstruieren, denkt man sich die den Zylinder längs des Grundkreises berührende Kugel $[O, r]$. Sind wieder H^0 und G^0 die neuen Projektionen der hellsten Punkte dieser Kugel, so teilt man $O'H^0$ in 10 und $O'G^0$ in 5 gleiche Teile. Die durch diese Teilpunkte gehenden Normalen zu l^0 sind die Spuren der Isophotenebenen auf der neuen Projektionsebene, nämlich n_0 für die Ebene der Lichtgrenze, h_0 und g_0 für die Berührungsebenen in den hellsten Punkten, v_0 für die Ebene der Isophote „vier". Durch die Schnittpunkte dieser Spuren mit der als Bildachse zu betrachtenden Geraden l' gehen die Spuren auf der Ebene des Grundkreises senkrecht zu l', nämlich $n_1, g_1, h_1, v_1, \ldots$. Die Spuren, welche einen förmlichen Maßstab — den Beleuchtungsmaßstab — bilden, schneiden den Grundkreis in den Punkten, welche die betreffenden Helligkeitsgrade aufweisen, z. B. die Spur v_1 ergibt die zwei Punkte 4, durch welche die Erzeugenden gehen, welche die Isophote „vier" des Zylinders bilden. Die 9. Spur sowie die Spuren h_1 und g_1 schneiden den Grundkreis nicht mehr in reellen Punkten; es kommen also nicht alle Helligkeitsgrade auf dem Zylinder vor (außer, wenn die Lichtstrahlen zur Zylinderachse senkrecht wären). Die Schnittpunkte von l' mit dem Grundkreise liefern die relativ hellste Erzeugende für die beleuchtete, bezw. unbeleuchtete Seite des Zylinders. Die Breite des Maßstabes für die beleuchtete Seite ist

$$O'J = s = \frac{r}{\sin \varepsilon_1}.$$

Für Diagonalbeleuchtung wird $O'J = \frac{r}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$. Der Punkt J ergibt sich daher, indem man durch den Eckpunkt R des gleichseitigen Dreieckes $O'QR$ einen Ordner zieht.

2. Es sei nun auf den Zylinder ein quadratisches Prisma aufgesetzt, wie es bei einem viereckigen Schraubenkopfe der Fall ist. Dieses Prisma wirft dann einen Schlagschatten auf den Zylinder. Er ist begrenzt durch den Schlagschatten der zwei Basiskanten, von welchen die eine zur Aufrißebene senkrecht, die andere dazu parallel ist. Der Schlagschatten der ersteren ist die Schnittlinie des Zylinders mit der Lichtstrahlen-

ebene, welche zur Aufrißebene normal ist und mit der Zylinderachse einen Winkel $\alpha = \pi/_4$ bildet. Die Schnittellipse ist also eine gleichseitige Ellipse*) (§ 12, 4). Im Aufrisse erscheint sie als Strecke auf l''. Der Schlagschatten der zur Aufrißebene parallelen Kante ist die Schnittlinie des Zylinders mit einer Lichtstrahlenebene, welche auch mit der Zylinderachse den Winkel $\alpha = \pi/_4$ bildet, also wieder eine gleichseitige Ellipse. Da die Ebene zur Symmetrieebene des Zweibildersystemes parallel ist**), muß der Aufriß der Ellipse ihrem Grundrisse symmetrisch kongruent sein. Der Grundriß der Ellipse ist aber der Grundkreis des Zylinders; es muß also auch der Aufriß ein Kreis mit dem Radius r sein. Der Lichtstrahl des Eckpunktes E des Prismas schneidet die Zylinderachse in einem Punkte M, welcher der Mittelpunkt beider Ellipsen ist. Der Aufriß der Schnittellipse ist dann der Kreis mit M'' als Mittelpunkt und r als Radius. Der Schlagschatten E_s des Eckpunktes E der Platte fällt auf die relativ hellste Erzeugende. Im Aufrisse erscheint also der eigentliche Schlagschatten als Strecke vom Umrisse bis E_s'' und dann als Kreisbogen bis zur Lichtgrenze. Die Tangente für den Schnittpunkt der Schattenlinie mit der Lichtgrenze ist ein Lichtstrahl. Sie ist nämlich die Schnittgerade der Ebene der Schattenellipse mit der Berührungsebene des Zylinders für die Lichtgrenze. Da aber beide Ebenen zu den Lichtstrahlen parallel sind, muß ihre Schnittgerade ein Lichtstrahl sein.

Erfahrungsgemäß erscheint der Schlagschatten, den ein Körper auf einen anderen wirft, dort am dunkelsten, wo sonst die größte Helligkeit herrschen würde (§ 8, 5). Beim Anlegen ist also zu beachten, daß der Schlagschatten, der auf den Zylinder fällt, von der Lichtgrenze gegen die hellste Erzeugende hin dunkler wird. Der Schlagschattenteil wird also beim Anlegen wie die dunkelste Zone behandelt und dann, je zwei Stufen zusammenfassend, neuerlich mit Tuschelagen versehen.

3. Ein hohler Halbzylinder, der oben mit einem Halbkreise abgeschlossen ist, soll so aufgestellt sein, daß man im Aufrisse die Innenseite sieht (Fig. 97).

---

*) Nach Plato auch „Ellipse von schönster Form".

**) Es ist das überhaupt der Fall, wenn l' und l'' gegen die Bildachse gleich geneigt sind.

Um die Isophoten zu konstruieren, ist wieder der Beleuchtungsmaßstab $g_1 h_1$ herzustellen. Dabei ist aber zu beachten, daß für die jetzt sichtbare Innenseite jener Teil des Zylinders beleuchtet ist, welcher auf der Außenseite unbeleuchtet ist, und jener Teil unbeleuchtet, welcher auf der Außenseite beleuchtet ist. Es ist also der Abstand $n_1 g_1$ in 10 und $n_1 h_1$ in 5 gleiche Teile zu teilen. Die Spuren der Isophotenebenen der Kugel schneiden den Grundkreis wieder in den Punkten, durch welche die Isophoten des Zylinders gehen. Der Schnittpunkt von l' mit dem Halbkreise ergibt die relativ hellste Erzeugende.

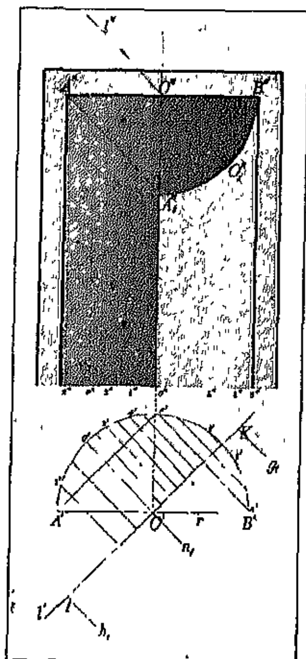


Fig. 97.

Ist der Halbzylinder oben mit einem Halbkreise abgeschlossen, so wirft der Durchmesser AB Schlagschatten ins Innere des Zylinders. Dieser Schlagschatten ist wieder die Schnittellipse des Zylinders mit einer Ebene, welche unter $\pi/_4$ gegen Grund- und Aufrißebene geneigt ist. Ihr Aufriß ist der Kreis $[O'', r]$. Als eigentlicher Schlagschatten des Durchmessers AB ergibt sich der Viertelkreis $A_s'' O_s'' B''$, wobei A_s auf der mittleren Erzeugenden und O_s auf der relativ hellsten Erzeugenden liegt. Der Schlagschatten der durch A gehenden Randerzeugenden fällt auf die mittlere Erzeugende. Beim Anlegen mit Tusche ist wieder der Streifen, welcher die relativ hellste Erzeugende enthält, am dunkelsten zu halten.

Ist die Helligkeitsverteilung für den Grundkreis eines Drehzylinders gefunden, so kann man [illegible] die Verteilung für den Normalschnitt eines [illegible] elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Zylinders [illegible]. Zieht man z. B. für die [illegible] Parallel[illegible] des Grundkreises die Tangenten und [illegible] man [illegible] parallelen Tangenten an

der Ellipse, so haben die Berührungspunkte der letzteren den Helligkeitsgrad 4.

4. Für einen Drehkegel mit vertikaler Achse, einem Basiskreise $[M, m]$ und der Spitze S sei ebenfalls die Diagonalbeleuchtung auszuführen (Fig. 98).

Die Lichtgrenze des Drehkegels ergibt sich, indem man durch die Spitze S den Lichtstrahl legt und seinen Schnittpunkt T mit der Basisebene sucht. Die Tangenten aus T an den Basiskreis sind die Spuren der beiden Berührungsebenen des Kegels, welche zu den Lichtstrahlen parallel sind. Die Erzeugenden des Kegels, welche durch die Berührungspunkte jener Tangenten gehen, bilden die Lichtgrenze des Kegels. Der dem Schlagschatten T zugewandte Teil des Kegelmantels ist unbeleuchtet. Wenn aber T (wie im vorliegenden Beispiele) ein uneigentlicher Schlagschatten ist, dann ist der ihm zugewandte Teil des Kegels beleuchtet.

Übungsaufgabe: Es ist der besondere Fall zu betrachten, in welchem die Erzeugenden des Kegels mit der Achse einen Winkel $\beta = \pi/_4$ einschließen.

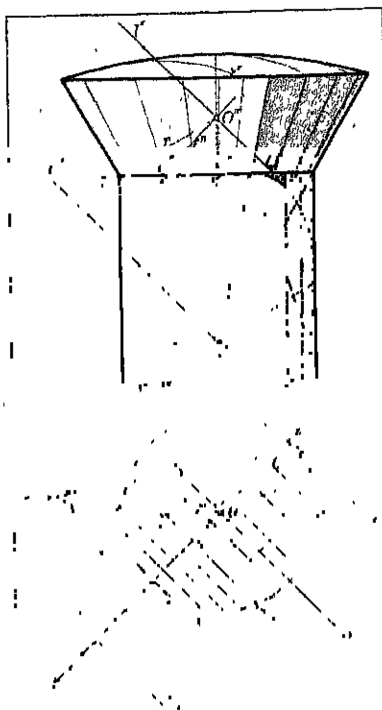


Fig. 98.

Um die Isophoten zu konstruieren, denkt man sich die Kugel [illegible] den Kegel längs des Parallelkreises $[M, m]$ berührt, und [illegible] durch [illegible] O [illegible] Lichtstrahl [illegible] bene [illegible] se auf [illegible] Mittelpunkt O

der Kugel nach O^0, wobei $M''O'' = M'O^0$ ist. Der Schnittpunkt Q des Lichtstrahles mit der Ebene des Parallelkreises bleibt ungeändert; daher ist O^0Q' die Umlegung l^0 des Lichtstrahles. Der Kreis $[O^0, r]$ ist dann der scheinbare Umriß der Kugel; er muß durch die Endpunkte des auf l' liegenden Durchmessers des Kreises $[M', m]$ gehen. Zieht man durch H^0, O^0, G^0 die Normalen zu l^0, so erhält man auf l' die Punkte J, N, K, durch welche die Spuren h_1, n_1, g_1 gehen. Die Spur n_1 schneidet den Kreis $[M', m]$ in den beiden Punkten o, welche der Lichtgrenze des Kegels angehören. Nun teilt man wieder die Strecke JN in 10 und KN in 5 gleiche Teile. Die durch diese Teilpunkte gehenden Spuren der Isophotenebenen schneiden den Kreis $[M', m]$ in den Punkten, welche mit S verbunden die gewünschten Isophoten ergeben. Weil nicht alle Spuren den Kreis in reellen Punkten schneiden, kommen wieder nicht alle Helligkeitsgrade auf dem Kegel vor. Die Schnittpunkte von l' mit dem Kreise $[M', m]$ ergeben relativ hellste Erzeugende. Die Breite des Beleuchtungsmaßstabes ist

$$NJ = s = \frac{r}{\sin \varepsilon_1}.$$

Für die frontale Gerade f der Ebene der Lichtgrenze der Kugel geht der Aufriß f'' senkrecht zu l'' durch O'' und der Grundriß f' horizontal durch O'. Die Frontale f schneidet die Ebene des Parallelkreises in F. Die Normale aus F' zu l' ist auch wieder die Spur n_1, welche den Kreis $[M', m]$ in den Punkten o schneidet, welche der Lichtgrenze angehören*).

Die Abbildung (Fig. 98) zeigt einen versenkten Schraubenkopf. Er ist von einem Teile des vorhin betrachteten Kegels und einer Kugelkappe begrenzt und schließt sich nach unten an den zylindrischen Schraubenbolzen an. Die Isophoten der Kugel und des Zylinders sind nach dem Früheren (§ 22, 6 und § 23, 1) zu ermitteln. Dabei ist wohl zu beachten, daß die Isophoten der einzelnen Flächenteile an der Übergangslinie nicht zusammentreffen (außer, wenn die Flächenteile berührend ineinander übergehen).

In dem vorliegenden Beispiele wirft noch der Kegel einen Schlagschatten auf den Zylinder. Jede der Berührungs-

---

*) Dieser Vorgang ist z. B. für einen Stumpf eines sehr hohen Kegels günstig.

ebenen des Kegels längs der Lichtgrenzerzeugenden schneidet nämlich den Zylinder in einer Ellipse. Diese hat S_0 als halbe große Achse. Die halbe kleine Achse ist m und erscheint im Grundrisse senkrecht zu $S'_0{}'$ und im Aufrisse horizontal. Auch der auf der Umrißerzeugenden liegende Punkt der Schnittellipse läßt sich leicht ermitteln, indem man den Aufriß des im Grundrisse horizontal erscheinenden Halbmessers der Ellipse bestimmt. Der eigentliche Schlagschatten wird durch den vom Punkte $_0$ des Kreises $[M, m]$ bis zur Lichtgrenze des Zylinders reichenden Ellipsenbogen begrenzt. Die Tangente für den Schnittpunkt der Schattenlinie mit der Lichtgrenze ist wieder ein Lichtstrahl.
